

Школа Опойцева



Арифметика и алгебра

Краткий курс

6–11

**Час, затраченный
на понимание,
экономит год
жизни.**



Школа Опойцева

Арифметика и алгебра

Краткий курс

6–11

МОСКВА



URSS

Опойцев Валерий Иванович

Школа Опойцева: Арифметика и алгебра. Краткий курс (6–11).

М.: ЛЕНАНД, 2016. — 200 с.

Коротко, просто и полно излагается школьная арифметика и алгебра с добавлением элементов теории вероятностей. Краткое и ясное изложение предмета создает общую картину, чего обычно не хватает при медленном и расплывчатом процессе обучения. Курс может быть использован: (1) для обычных и ускоренных занятий математикой; (2) для повторения пройденного и упущенного; (3) для самообразования. Полезное для себя найдут также учителя и родители.

Текст сопровождается видеолекциями на oschool.ru и на youtube.com

Графическое оформление Марины Павликовской

Формат 60×90/16. Печ. л. 12,5. Зак. № АХ-889.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».

117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978–5–9710–3559–6

© ЛЕНАНД, 2016

20159 ID 216780



9 785971 035596



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

Оглавление

| | |
|---|-----------|
| Предисловие | 7 |
| 1 Как учить и как учиться | 9 |
| 1.1 Идеологический вираж | 10 |
| 1.2 Об умении решать задачи | 11 |
| 1.3 Категории учащихся | 12 |
| 1.4 Крайние точки | 14 |
| 1.5 О взаимодействии с подсознанием | 16 |
| 1.6 Гипноз: ни дна ему, ни покрывки | 17 |
| 2 Числа и арифметика | 20 |
| 2.1 Числа в Поднебесной | 20 |
| 2.2 Как математики из мухи делают слона | 21 |
| 2.3 Откуда берутся отрицательные числа | 23 |
| 2.4 Очень важный параграф | 25 |
| 2.5 Рациональные числа | 27 |
| 2.6 Корни целой степени | 28 |
| 2.7 Бьющий по мозгам пример | 29 |
| 2.8 Десятичные дроби | 30 |
| 2.9 Вещественные числа | 31 |
| 2.10 Что делать, если ум заходит за разум | 33 |
| 2.11 Отношения и пропорции | 34 |
| 2.12 Проценты, будь они неладны | 36 |
| 2.13 Операции с множествами | 37 |
| 3 Натуральный ряд | 38 |
| 3.1 Позиционная система счисления | 38 |
| 3.2 Простые числа | 40 |
| 3.3 Основная теорема арифметики | 42 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.4 | Делимость, НОД и НОК | 44 |
| 3.5 | Признаки делимости | 46 |
| 3.6 | Алгоритмы вычислений | 46 |
| 3.7 | О фундаменте арифметики | 48 |
| 3.8 | Ещё раз об игровых площадках | 49 |
| 3.9 | Когда читать роман «Анна Каренина» | 52 |
| 4 | Функции и системы координат | 53 |
| 4.1 | Что такое функция | 53 |
| 4.2 | Графическое описание функции | 54 |
| 4.3 | Сопутствующие понятия | 55 |
| 4.4 | Функции нескольких переменных | 57 |
| 4.5 | Системы координат | 58 |
| 5 | Линейная функция | 60 |
| 5.1 | Что такое линейная функция | 60 |
| 5.2 | О замене переменных | 61 |
| 5.3 | Прямые на плоскости | 62 |
| 5.4 | Равномерное прямолинейное движение | 64 |
| 5.5 | Плоскости в пространстве | 65 |
| 6 | Квадратный многочлен | 67 |
| 6.1 | Квадратные уравнения | 67 |
| 6.2 | Теорема Виета | 68 |
| 6.3 | Вернёмся к нашим баранам | 69 |
| 6.4 | Ряд Фибоначчи | 70 |
| 6.5 | Квадратичная функция | 71 |
| 6.6 | Брошенное вверх тело | 73 |
| 6.7 | Неравенство Коши—Буняковского | 74 |
| 6.8 | Чем знаменита парабола | 74 |
| 6.9 | Деление многочленов и теорема Безу | 75 |
| 6.10 | Полезные следствия | 76 |
| 7 | Показательная функция | 78 |
| 7.1 | Экспонента | 78 |
| 7.2 | Свойства показательной функции | 79 |
| 7.3 | Экспоненциальный рост | 81 |
| 7.4 | Геометрическая прогрессия | 83 |
| 7.5 | Рекуррентные соотношения | 84 |

| | |
|---|------------|
| <i>Оглавление</i> | 5 |
| 8 Логарифмы | 85 |
| 8.1 Логарифмическая функция | 85 |
| 8.2 Свойства логарифмов | 87 |
| 8.3 Где нужны логарифмы | 88 |
| 9 Комбинаторика | 91 |
| 9.1 Экспоненциальные кошмары | 91 |
| 9.2 Размещения, перестановки, сочетания | 92 |
| 9.3 Бином Ньютона | 94 |
| 10 Как строить графики | 95 |
| 10.1 С чего начинать | 95 |
| 10.2 Некоторые общие соображения | 96 |
| 10.3 Графики с модулями | 98 |
| 10.4 Потенциал здравого смысла | 100 |
| 10.5 Другие варианты | 103 |
| 10.6 Типовые графики и примеры | 104 |
| 10.7 Геометрические места точек | 108 |
| 11 Суммирование последовательностей | 109 |
| 11.1 Арифметическая прогрессия | 109 |
| 11.2 Геометрическая прогрессия | 110 |
| 11.3 Трюк вычисления двумя способами | 111 |
| 11.4 Камуфлируя банальные факты | 112 |
| 12 Преобразования, тождества, уравнения | 114 |
| 12.1 Опорные точки | 114 |
| 12.2 О самородках в рутине | 116 |
| 12.3 Разложение на множители | 117 |
| 12.4 Секреты маскировки | 119 |
| 12.5 Избавление от иррациональности | 122 |
| 12.6 Иррациональные уравнения | 123 |
| 12.7 Системы уравнений | 123 |
| 12.8 Использование симметрии | 126 |
| 12.9 Опора на графическое представление | 129 |
| 13 Неравенства | 131 |
| 13.1 Основные свойства | 131 |
| 13.2 Задачи на доказательство | 132 |
| 13.3 Решение неравенств | 134 |

| | |
|--|------------|
| 13.4 Территория метода интервалов | 135 |
| 13.5 Категория мышления — выпуклость | 137 |
| 13.6 Неравенство Иенсена | 139 |
| 13.7 Искусство замечать следы | 141 |
| 14 Текстовые задачи | 142 |
| 14.1 В чём главная трудность | 142 |
| 14.2 Задачи на составление уравнений | 143 |
| 14.3 Обыденные задачи | 145 |
| 14.4 Примеры | 146 |
| 14.5 Правильные многогранники | 149 |
| 15 Факультатив | 151 |
| 15.1 Существует ли бесконечность | 151 |
| 15.2 Когда помогает бесконечность | 156 |
| 15.3 Теорема Кронекера | 158 |
| 15.4 Метод шевелений | 159 |
| 15.5 Комплексные числа | 161 |
| 15.6 Сетевые графики | 167 |
| 15.7 О теории игр | 172 |
| 15.8 Решение игры по Нэшу | 174 |
| 15.9 Чем выгодны убыточные акции | 175 |
| 16 Вероятность | 178 |
| 16.1 Важное предисловие | 178 |
| 16.2 Основная модель | 179 |
| 16.3 Объединение и пересечение событий | 181 |
| 16.4 Условная вероятность | 183 |
| 16.5 Независимость | 184 |
| 16.6 Случайные величины | 184 |
| 16.7 Парадокс транзитивности | 185 |
| 16.8 Подводные рифы статистики | 186 |
| 16.9 Дисперсия и ковариация | 187 |
| Обозначения | 188 |
| Предметный указатель | 189 |

Предисловие

*Спасибо тебе, Господи,
что ты создал всё нужное нетрудным,
а всё трудное — ненужным.*
Георгий Сковорода

Можно ли школьнику по этой книжке учить математику?
Ни в коем случае. Выучишь за неделю, а потом что —
годами ходить в школу, изображая заинтересованность?



Шутки шутками, но тут действительно предлагается сильноедействующее средство, позволяющее быстро освоить арифметику и алгебру. Там ведь и учить особенно нечего. Всё можно изложить очень просто и коротко. Правда, школа маскирует сей факт, поскольку ей надо чем-то занять население. Поэтому скобки в « $(a+b)$ на $(a-b)$ » раскрываются годами, превращая жизнь в пытку. И в «полный курс» добавляется столько лишнего и несущественного, что необходимое не улавливается.



Так что если хотите жить в другом ритме — вот вам средство. Особенно если упущено «пройденное».

Разумеется, не о волшебной таблетке речь. Дело в том, что освоение любой дисциплины состоит из двух ингредиентов: *понимания и овладения*. Первому могут содействовать внешние источники, второго приходится добиваться самому. Когда вы красите забор, а старший товарищ на бегу подсказывает, что кисточку надо держать «вот так», чтобы на сапоги не капало, —

обучение ещё не состоялось. Потому что вам надо идею усвоить, потренироваться, — и на этом втором этапе вас никто не заменит: ни книги, ни учителя. С математикой такая же история. Необходима практика — решение задач, на что уходит какое-то время.

Однако шило на мыло мы не предлагаем менять. Книга читывается в мгновение ока. Для завершения процесса потребуется ещё какая-то часть жизни. Всё! «Секрет» заключается в том, что здесь даётся компактное описание и цельное представление о предмете. Именно этого недостаёт обычной системе образования. В школе дисциплина размазывается во времени и пространстве, и общей картины не возникает. Здесь же краткое и прозрачное изложение предмета легко помещается в голове и может служить путеводителем при любой смене декораций.

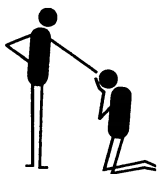


При этом важно, чтобы школьники думали, что книга писана для взрослых, а взрослые были уверены, что текст ориентирован на детей. Тогда всем всё будет понятно.

Глава 1

Как учить и как учиться

*Время, затраченное на понимание,
экономит год жизни.*



Глава с математикой напрямую не связана, и её при желании можно пропустить, если не думать об эффективности обучения. Но учить математику на 90% надо так же, как всё остальное. Ибо успех обеспечивают общие принципы, а 10% приходится на математическую специфику.

К тому же вся жизнь — учение. В любом взаимодействии, общении — мы учим друг друга. Берём и подаём пример. Почему бы тогда не отладить основной процесс? Поэтому штудировать главу не надо, но время от времени возвращаться — имеет смысл.

Обсуждаемые проблемы представляют интерес и для тех, кто учит, и для тех, кто учится. При этом каждой стороне полезно смотреть на процесс не только со своей колокольни, но и с противоположной. Потому что важно понимать, кого мы учим, или о чём думают те, кто нас учит.



Видеосопровождение см. на сайте oschool.ru

1.1 Идеологический вираж

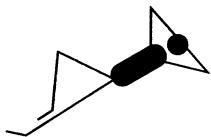
Математическое образование в школе движется в пропасть, исходя из благородных на вид мотивов. Говорим мы вот о чём. Например, чётная функция определяется свойством



$$f(x) = f(-x), \quad (1.1)$$

пока кто-нибудь не поднимет шум из-за «неаккуратности». Дескать, а что если $f(x)$ определена при каких-то x , при которых $f(-x)$ не определена? — Велика беда. Значит, f не чётная. Но публика не успокаивается. Мол, для каких-то x всё же чётная. И почему в (1.1) об x ках ничего не сказано? Какие подразумеваются? Какие-какие? И т. д.

Чувствуете, как проблема, не стоящая выеденного яйца, заводит в тупик? Особенно «начальство», которому надоело расшаркиваться, и оно приплетает в (1.1) область определения f , постулирует её симметрию, да ещё пританцовывает. Чтобы довольны были: «и гордый внук славян... и друг степей калмык».



Но это проблема не только математическая. *Витгенштейн* целое исследование провёл насчёт *следования правилам*. Любая инструкция ведь неполноценна. «Встанешь, умоешься, оденешься и — в школу». Как понимать? С какой ноги вставать с постели? Сколько минут умываться, в какой последовательности одеваться, в школу бегом или пешком, в свою или в чужую?

В путешествии по реке жизни такие вопросы кажутся идиотизмом. А в математике — в порядке вещей! Так что же это за наука такая, будь она неладна. Да ещё традиция сложилась — козырять пунктуальностью и строгостью, пропади они пропадом. В текстах одни оговорки. Леса за деревьями не видно.

В результате изучается не столько математика, сколько булаво-чки, которыми она пришпилена к панораме Вселенной. И не возразишь особенно, потому что глупо возражать против аккуратности и дисциплины ума. Но если они ношу делают неподъёмной, надо искать другой баланс. О математике нормальные люди — будь то учёные или Миша с Вовочкой, вычисляющие дуэтом дважды два, — говорят как о будничных вещах, не до-сказывая и даже перевирая. Недопонятое потом уста-канивается само собой. В любом случае преподавание математики надо двигать туда же, куда двигаются ком-пьютерные программы, предлагающие пользователю самому догадываться, пробовать и ошибаться. И это, оказывается, самый эффективный способ освоения. И мы далее стараемся ему сле-довать.



1.2 Об умении решать задачи

Жалобы по поводу неумения решать задачи широко распростра-нены. При этом люди обычно не отдают себе отчёта в чём дело, каков масштаб проблемы. Многим кажется, что не хватает какой-то фитюльки. Преподаватель, мол, забыл пояснить.

В диагностику «заболевания» никто особо не вдаётся, и тра-тит уйму времени на поиски волшебной таблетки. Кто бы, де-скать, объяснил, какой финт ушами помогает решать задачи.



На базовом уровне никакие финты не требуются, задачи долж-ны решаться сами собой¹⁾. Потому что всеобщее образование рас-считано на усвоение азов теории и готовых рецептов для простых задач. Вплоть до подстановки числовых значений в известные формулы или, что немного сложнее, реализации стандартных

¹⁾ Тут есть исключения. Это текстовые задачи, но там трудности не ма-тематические, глава 14. И геометрия, о которой речь — в другом томе.

схем рассуждений в конкретных условиях. Поэтому, если что-то не получается, надо штудировать теорию ещё раз.

На олимпиадном уровне задачи опираются уже на специальные инструменты, которые надо отдельно изучать и осваивать, решая большое количество примеров.

В диапазоне между этими крайними положениями, имеется много градаций. Задачи, являющиеся по сути чисто контрольными вопросами, быстро приедаются. Поэтому школьное образование пытается приподняться над нижним уровнем, чаще всего — неудачно. Как можно инициировать самостоятельное мышление? Подключая необходимость поиска. Заставляя подбирать какой-либо способ, скажем, избавления от иррациональности в знаменателе. И хотя это скука смертная, приходится тренироваться, чтобы набить руку. То есть решать задачи необходимо в любом случае, и калибр этой проблемы едва ли не превосходит размеры теоретической части.

Так что неумение решать задачи — цитрамоном не лечится. Необходимо время, терпение, желание. А для активации желания необходимо соприкасаться с более-менее интересными задачами. Такая тут диалектика получается. Попытка ограничиться минимумом — отбивает охоту. А готовность перейти на другой виток спирали — требует больше времени и сил. Но второй вариант — стратегически правилен.

1.3 Категории учащихся

Прежде всего важно понимать ученическую неоднородность. Любая аудитория делится упрощённо на три категории: *A*, *B* и *C*. Первые схватывают на лету, вторые вечно переосмысливают, третьи ничего не понимают, как ни объясняй.

Сразу важно оговориться, все группы одинаково ценны для мировой цивилизации. Не по причине нашей лицемерной позиции. Потому что в условиях, скажем, землетрясения или рисования — с ними легче иметь дело. Не говоря о том, что гениальные решения чаще рождаются в недрах *C*.



Конечно, мы баланс нарушаем в пользу *С* для компенсации их невыгодной роли в школьные годы. Плюс к тому, выразив восхищение, спокойно можно писать, что они — не понимают. Теперь это не обидно. Из них потом такие *Менделеевы* получаются, что группе *А* остаётся сожалеть, что схватывала на лету.

Однако разговор сейчас о другом. Группа *С* ничего не понимает, и не поймет, но *Система* смириться с этим не хочет. В результате процесс обучения затягивается до тошноты.



Выход из положения кажется тривиальным. Надо объяснять коротко и просто. Ориентируясь на А и В. Группе С хуже не будет — некуда. Да и перед А + В не надо расшаркиваться. Тогда процесс вернётся в естественное русло. Нормализуются акценты, пропорции, интонация.

Конечно, тут противоречие. Если «коротко и просто», то чем наполнять занятия? Время-то обучения сокращать нельзя. Инкубационный процесс, так сказать. Набивший оскомину пример девятимесячного вынашивания плода здесь как раз к месту.

Но «коротко и просто» всё же вписывается в инкубационное ожидание. Масса времени уходит на переучивание. Быстрое схватывание на деле не так замечательно. Ибо быстро — не обязательно правильно. Да ещё выветривается. Поэтому схватывание на лету не означает завершения процесса. Следовательно, объяснять приходится снова и снова.



Получается, группу *С* перестали принимать в расчёт, но потребность в объяснениях едва ли не увеличилась. Однако объяснения теперь нужны совсем другие. Не для заполнения отведённого времени, а для получения результата. Внешне всё по-прежнему переливается из пустого в порожнее, но знание растёт и крепнет под мягким корректирующим воздействием.

Если кому-то кажется, что в школе подобное, собственно, и реализуется, то это не так. На словах похоже, но о наличии пропасти легко судить по результатам репетиторства. В школе — никак, а с репетитором дело идёт на лад, и успех имеет очень

простое объяснение. Процесс вне школы вытаскивается из ловушки «одни делают вид, что учат, другие — что учатся» — и ставится на нормальные рельсы. Объяснения, решение задач, комментарии — все делается с единственной целью достижения результата. Поэтому объяснения, не меняя своего имени, меняют суть. Исчезает направленность «в никуда», и они превращаются в простые и конкретные инструменты. Без натуги, вскользь, не преследуя цель, сразу достичь максимального эффекта, не выходя за пределы 5–10 минут, выделяя главное и оставляя возможность неправильно понять детали, возвращаясь раз за разом назад, но в другой аранжировке, в лёгкой и даже в легковесной форме, — такие объяснения несколько отличаются от того, что могло бы одобрить министерство образования. Но они дают результат! И было бы неплохо поставить на те же рельсы образование целиком. Подытоживая сказанное, фиксируем главное.

- *Стремление добиться понимания всего всеми — мешает достижению какого бы то ни было результата. Получается нечто из разряда «за двумя зайцами погонишься».*
- *Излишнее педагогическое усердие малоэффективно. Как анекдот чашнет без недосказанности, так и уроки блекнут под грузом избыточной настойчивости учителя²⁾.*

1.4 Крайние точки



Посмотрим теперь на аудиторию изнутри, фокусируясь на источниках разнообразия. Представители $A + B + C$ разбросаны в диапазоне, о широте которого можно судить по крайним точкам.

²⁾ К замечанию Вольтера «... хочешь быть скучным — говори всё» можно добавить: «эсэждешь непонимания — объясняй подробнее».

• Слева пребывает тот, кого стандартными методами учить невозможно. В чистом виде — это уникал, гений. Ни одну строчку он не может дочитать до конца, потому что спотыкается на каждом слове. Слова завораживают и уносят в другой мир. Верблюдов до сих пор не видел, хотя пять раз бывал в зоопарке. Но так вышло, что всё внимание перехватывали воробьи на входе. Фокус его интереса цепляется за любую деталь, и воображение уносит нелегко куда, с любой стартовой площадки.

• На правом краю устроился совсем другой индивид. Ему не до подробностей. Взор устремлён за горизонт. Мелкие «почему» его не интересуют, детали не отвлекают. Тратит энергию и время готов только по большому счёту.

Как первого можно учить? Никак. Вдумайтесь. Что посоветовать можно? — Тому, кто учит, — смириться и будьте деликатны. — Тому, кто учится, — не расстраивайтесь, такова жизнь. Живите, как получается.

Второго учить традиционными методами очень легко. Вы ещё не успели объяснить, как он призывает двигаться дальше. Вот уравнение, вот решение. Что ещё объяснять?



В недрах «диапазона» ситуация бывает трагичнее. Незвестное через x обозначить не удаётся. — Длина, умноженная на ширину, равна площади. Согласен? — Он согласен, если тезису предшествовало сто часов нервотрёпки. — Далее. С трудом удаётся уговорить считать ширину неизвестной. Но последний трюк — замена «ширины» буквой x — не проходит. Вы и так, и эдак. Мол, этикет таков — неизвестное через x . Но он не понимает. И букв в «ширине» больше, и пахнут с иксом неодинаково, и звучат по-разному. Да какая разница тебе, как звучат! — всхлипывает учитель, и его увозят на скорой.

А ля гер ком алягер, что поделаешь. Проблему усугубляет русский менталитет. Запад стремится понять КАК, мы всегда хотим докопаться ПОЧЕМУ. Как бы там ни было, но и системы образования наши так ориентированы. А учить умению КАК, между прочим, гораздо проще, чем разумению ПОЧЕМУ. Бесконечно проще. Потому что у КАК всегда есть исчерпывающий ответ³⁾, а ПОЧЕМУ уводит в бездонную пропасть. Одно цепляется за другое, и нет этому конца. Отсюда и томление русской души, и необыкновенные взлёты на фоне мучительных провалов русского образования. Тактически иногда целесообразнее начинать с вопроса КАК. Запад предпочитает этим и заканчивать, тщательно заделывая брешь в пространство ПОЧЕМУ⁴⁾. Мы же расширяем эту брешь и культивируем стремление туда. В результате часть населения не удаётся вернуть обратно. Зато другая — вдохновлена, и не может успокоиться.

1.5 О взаимодействии с подсознанием



Проблема взаимодействия сознания с подсознанием в обучении краеугольная, см. **oschool.ru**. Слабое звено здесь кроется в том, что осознав что-либо «математическое» умом, человек останавливает процесс. И *Бегемотик*⁵⁾, который учится медленнее, остаётся необученным. В других областях источником у него служат чувства. А тут формулы — без *сопровождения разумом* теряют смысл, превращаются в информационный мусор. Поэтому выход из положения остаётся один: *продолжать процесс обдумывания, воображения, проигрывания в голове*.

Затея, конечно, выглядит по-дурацки. Вы уже всё поняли, но продолжаете переливать из пустого в порожнее. Однако процедуру можно организовать иначе. Персонифицируйте подсознание и начинайте обучать его, разыгрывая из себя учителя. Процесс невероятно полезный. Если бы *Бегемотик* не существовал, его бы стоило выдумать. Ибо

³⁾ В одном из вариантов: НИКАК.

⁴⁾ Известно: кто знает КАК — исполняет, кто знает ПОЧЕМУ — руководит. Но пусть, думает Запад, «почемукалки» пробивают себе дорогу сами. Иначе с остальными — такая морока. Как у нас.

⁵⁾ Или Крокодилчик, или Змей Горыныч, или Маша/Сапа. Подсознание мы называем *Бегемотиком* в качестве общего знаменателя. Об особенностях воспитания *Бегемотика* см. **oschool.ru**.

лучший способ изучить предмет — научить другого. И подсознание — идеальный слушатель, который всегда под рукой. Разумеется, исполнять сие желательно с лёгкой иронией, дабы компенсировать иногда возникающее ощущение идиотизма. Но будьте уверены, что освоив такой внутренний диалог, вы добьётесь больших успехов не только в математике, но и в других сферах бытия.

Обучая подсознание, необходимо стремиться к простоте, в поисках которой приходится сталкиваться с определёнными сложностями. Потому что сообщества профессионалов образуют анклавы, куда не хотят пускать посторонних. Недаром Бернард Шоу писал, что *всякая профессия — это заговор против непосвящённых*.

Экономисты отгораживаются от толпы заумными теориями. А хирурги в не столь давние времена принимали в штывы обезболивающие препараты, считая, что при обезболивании любой дурак сможет делать операции. Математики тоже не лыком шиты. Ставя барьеры строгости обоснования результатов, они не только решают благородную задачу очищения теории от разной шелухи и создания надёжного фундамента, но и ставят палки в колеса новичкам, которым бы хотелось понять сначала кое-что «на пальцах». Но не тут-то было. Вспоминается жена, которая спрашивала мужа, накрыть стол для гостей так, чтобы ещё пришли или чтобы больше не приходили? Как математики «стол накрывают» — сами знаете.

1.6 Гипноз: ни дна ему, ни покрывки

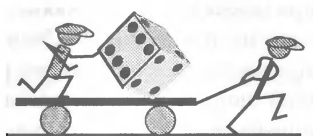
Анатомия непонимания не так проста. Конечно, если историю России можно изучать, не зная, что натворили греки до нашей эры, то даже за арифметику, не владея ремеслом раскрытия скобок, нечего браться. В математике всё жутко переплетено. И если что упущено, так оно потом аукается, не переставая.

Ещё хуже другое. Ничего не упущено, а **непонимание** как та ложка дёгтя. Всё выучено, усвоено до автоматизма. Но какая-то заноза остаётся. И ноет, и болит, и тягучая пелена застилает мозги.

Жизнь превращается в каторгу, и сводится к написанию шпаргалок, которые — очень ненадёжная вещь. «Шаг вправо, шаг влево» — и вы в ступоре, и вас экзаменатор берёт за фук. Не говоря о том, что любую новую тему вы всё равно не понимаете, ибо для понимания нужны инструменты в голове, а не писульки в рукаве. Вызубренное

не лучше шпаргалки. Ибо «шаг вправо, шаг влево» — и вы опять в ступоре. Потому что знаете КАК, но не знаете ПОЧЕМУ.

Разумеется, изучая предмет, **надо ходить кругами**. Много раз по одному и тому же месту. Вы представьте, что переехали жить в новый город, и хотите узнать его. Вам достаточно будет проехать по территории? Конечно, нет. Город надо исходить вдоль и поперёк. Пешком и на трамвае, и днём и ночью, и в дождь и в снег, и в праздник и в будни. Поговорить с людьми. Порыскать «в поисках» и проклясть его лабиринты и тупики. Чтобы, как говорится, полюбить на целый век. И тогда лишь, однажды выходя из дома, вы увидите вдруг *Знакомый город*. С математикой такая же песня — и **хождение кругами** необходимо. Но без понимания диагноза «лечение» идёт всё-таки не так успешно, как хотелось бы. А одна из главных причин заключена в действии «гипнотического вируса».



Гипноз, как принято считать, основан на проходе в глубины подсознания обманным или силовым путём⁶⁾. И чем легче человек поддаётся гипнозу, тем труднее ему даётся математика, в которой слишком много механизмов, заклинивающих сознание и действующих по типу *тройной спирали Эриксона*⁷⁾. Спираль Эриксона — это хитрый и вместе с тем очень простой трюк.

Рассказывается некая история, которая в середине обрывается, и начинает рассказываться вторая история, которая снова не доводится до конца, и повествование переключается на третью историю. Сознание вынуждено держать в памяти все эти половинчатые истории — и у него оказываются «заняты руки». Охрана снята, дорога к подсознанию свободна, слушатель в трансе⁸⁾. В математике нечто подобное происходит постоянно. В результате многие попадают в состояние транса задолго до того, как то или иное рассуждение услышано до конца.

⁶⁾ Гипнотизёр действует обычно, маскируясь, пугая или отвлекая сознание, играющее роль щита.

⁷⁾ Эриксон — знаменитый американский гипнотизёр.

⁸⁾ И это не сказка, а психологический приём, простой как молоток и эффективный как противозаконный «двадцать пятый кадр». Примерно так, кстати, действуют некоторые компьютерные вирусы. Сначала переполняют память компьютера, а потом с парализованным прибором делают, что хотят.

Состояние транса — это состояние, в котором мы все в той или иной степени пребываем. Это не гипнотический сон с каталептической атрибутикой, а бодрствование с некоторой заторможенностью сознания. Если заторможенность превышает определённый порог, адекватность поведения и восприятия нарушается. Это и происходит часто при изучении математики, что препятствует пониманию происходящего.

Например, доказывая что-то, мы предполагаем противное и ведём рассуждение к противоречию. Но о «предположении противного» надо помнить, что мешает рассуждению, загружая часть памяти, которую хорошо было бы использовать для другой надобности. Аналогично действует гипнотизёр, отвлекая ресурсы нашего мозга на какую-либо постороннюю работу, типа бессмысленного счёта, а сам втягивает в подсознание какую-нибудь «пейте кока-колу».

Рассмотрим известную гипнотизирующую задачу. *В мешок положили 3 чёрных колпака и 2 белых. Трёх участникам игры завязали глаза, и надели им на головы 3 чёрных колпака. Повязки с глаз сняли. Как они быстро догадались, какого цвета колпаки у них на головах?*



Обозначим игроков А, В, С. Каждый, например, А рассуждает так. Если на мне белый колпак, то В, видя перед собой белый и чёрный, легко понял бы, что на нём чёрный. Поскольку в противном случае С мгновенно бы сообразил, видя перед собой два — белых, что на нём чёрный колпак. Но С мгновенно не реагирует. Значит, на мне чёрный — решил бы В. Но он пока молчит. Значит, на мне чёрный — решает А.

Рассуждение плохо помещается в голову, и его многие даже не могут повторить. Не любит наш интеллектуальный процессор удерживать одновременно несколько деталей. **И его надо тренировать.**

Это, пожалуй, единственный способ для развития и увеличения своего ментального пространства, чтобы оно было способно вмещать длинные цепочки рассуждений. Говоря условно, на языке компьютерных аналогий, необходимо наращивать свою «оперативную память» и учиться блокировать мысленные посторонние коловращения, заикливающие мозговой процессор. Всё это поддаётся тренировке, но требует упорства и терпения.

Глава 2

Числа и арифметика

*Рочится в памяти наплыв
Лиц,
Не продолжить, который год —
Блиц,
И лишь мерещится полёт
Птиц,
Таков удел, когда живешь
Нич.*

2.1 Числа в Поднебесной

И на Земле,  , и в Раю,  , число есть ЧИС-

ЛО — явление абстрактное и до некоторой степени первичное. О глубине понятия поначалу лучше не задумываться, дабы не раздражать Бегемотика¹⁾. Ибо по идее всё просто, и с этого целесообразно начинать.

¹⁾ Глубины первичных понятий начинают явно ощущаться с появлением седых волос. У кого-то это связано с приходом понимания, у кого-то — непонимания. В любом случае такие откровения нельзя навязывать среднестатистическому персоналу репродуктивного возраста, дабы не нарушать порядок вещей во Вселенной. (!) Про «Бегемотика» см. видео «Прембула» и «О взаимодействии сознания с подсознанием» на сайте oschool.ru.

Конечно, если мы начнём умничать раньше времени, то это кому-то может понравиться — министру образования например. Потому что он опасается простых разговоров, легко возбуждающих критиков. Заумное изложение — другое дело. Там критикуя, легко вляпаться. Поэтому многие воздерживаются.

Но нам-то с вами — что? Нам главное, чтобы понятно было, естественно. Поэтому мудрить особенно не стоит. Как малых детей учат считать, так и нам подходит. Один, два, три и так далее. Порядок запоминаем, а потом убеждаемся, что процесс счёта идёт одинаково, хоть ворон считаем, хоть — учителей.

Да и арифметика трудностей не вызывает до поры до времени. *Два привидения и три обезьяны — всего пять человек.* Какие проблемы? С дробями хуже, но это отдельный разговор.

2.2 Как математики из мухи делают слона

Математики, конечно, с нами не согласятся. Не могут они на мир смотреть по-простому. Всё у них «с вывертом». Ну да ладно. Понаблюдаем, как они щёки надувают.

Итак. Сначала вводится понятие *множества* как совокупности своих *элементов*. Элементы первичны, неопределяемы и могут быть объектами любой природы. Например,

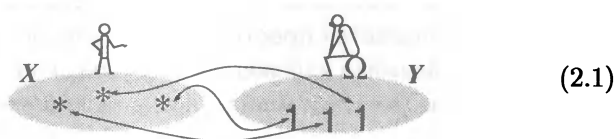
$$S = \{1, 8, 3\}, \quad K = \{\Theta, \Phi, \Omega\},$$



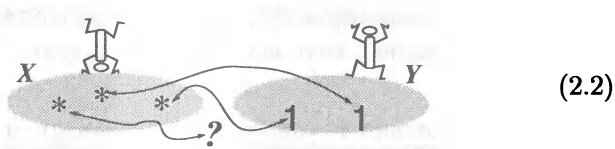
или $L = \{*, *, *\}$, $M = \{1, 1, 1\}$.

Определение. Множества X , Y называют эквивалентными, пишут $X \sim Y$ или $|X| = |Y|$, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Вот пример такого соответствия²⁾



между Y , состоящим из единичек, и X , состоящим из звёздочек. Множества S , K , L , M эквивалентны друг другу. В случае



установить *взаимно однозначное соответствие* не удаётся.

Отношение « \sim » позволяет³⁾разбить все множества на *классы эквивалентности*⁴⁾. Класс эквивалентности множества X называют его **мощностью**, и обозначают как $|X|$. Множества можно упорядочить по мощности с помощью следующего трюка.



Считаем множество X меньше Y по мощности, пишем $|X| < |Y|$, или просто $X < Y$, если взаимно однозначное соответствие можно установить между X и некоторым подмножеством $Z \subset Y$, где в Z входят не все элементы Y . Пока говорим о конечных множествах. Левое множество (2.2) мощнее правого.

Далее в каждом *классе эквивалентности* выбираем по стандартному представителю — например по множеству, элементами

²⁾ Звёздочки и единички (2.1) объединяются в пары. Каждой звёздочке соответствует единичка, и наоборот.

³⁾ Поскольку *рефлексивно* $X \sim X$, *симметрично* $X \sim Y \Leftrightarrow Y \sim X$ и *транзитивно* $X \sim Y, Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$.

⁴⁾ На множества эквивалентных множеств.

которого являются только единички, и располагаем эти множества в порядке возрастания,

$$\{1\}, \{1, 1\}, \{1, 1, 1\}, \dots, \{1, \dots 1\}, \dots \quad (2.3)$$

Затем членам последовательности (2.3) сопоставляем какие-нибудь символы, скажем, $1, 2, 3, \dots$, и получается **натуральный ряд**

$$\text{человек} \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}, \quad (2.4)$$

члены которого называют **натуральными числами**.

Выглядит, конечно, научнообразно, но вопрос «что такое число» — получает всё же ответ. У нас-то было бу-бу-бу. Число, мол, такая штука, связанная со счётом. Какая штука? С каким счётом? Как связана? А тут вроде концы с концами сходятся и хвосты не повисают.



2.3 Откуда берутся отрицательные числа

Следующий шаг — **отрицательные числа**. Вокруг них крутится такой водоворот глупостей, будто речь идёт о ядре Мироздания. Что это такое? Как правильно определить? Так нельзя. Ты не понимаешь. — Сам ты — сибирский валенок. И так далее.

Попробуем разобраться. Будем, например, движение вправо помечать знаком *плюс*, «+», влево — *минус*, «-», и тогда «+а» шагов вправо, «-b» влево — дают в итоге результирующее местоположение $a - b = (+a) + (-b)$, что удобно, и свидетельствует о пользе отрицательных чисел.

Критики взвиваются: детский лепет! Вспомните ещё тётю Клаву с отрицательными градусами на термометре. Мы же, дескать, в храме Математики, а не у Бабы-яги на заднем дворе.

Огород городить надо абстрактно! Каждому натуральному n , пишут⁵⁾ $n \in \mathbb{N}$, сопоставляется «противоположное» число «-n»

⁵⁾ « \in » означает «принадлежит».

(минус n), называемое *отрицательным*, и полагают

$$n + (-n) = n - n = 0.$$

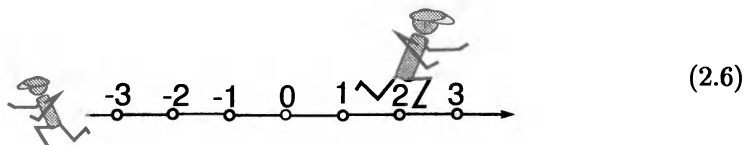
Что такое нуль, 0? — Ничто, в смысле $a - a = 0$. Операция-то вычитания $a - b$ естественным образом определена в арифметике изначально при $b \leq a$. К примеру, можно отнять *часть* привилегий, можно отнять — *все*. Поэтому к натуральному ряду (2.4) имело бы смысл добавить нуль. Иногда так и делают. Но чаще в \mathbb{N} ограничиваются целыми положительными числами⁶⁾.

В итоге натуральный ряд \mathbb{N} расширяется до *множества целых чисел*

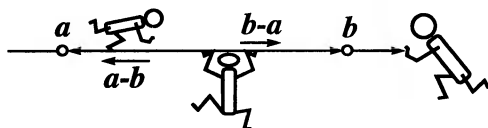
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2 \dots\}. \quad (2.5)$$

При этом расширение *игровой площадки* \mathbb{N} до \mathbb{Z} вводится для того, чтобы $b - a = b + (-a)$ никогда не уведило в аут, за пределы *игровой площадки*. Чтобы уравнение $\boxed{a + x = b}$ всегда решалось.

Множества \mathbb{N} , \mathbb{Z} полезно соотносить с геометрическими образами на прямой, снабжённой равномерно отстоящими делениями




На этом поле результат вычитания можно представлять как вектор, направленный влево или вправо,



⁶⁾ Определения и терминология в жизни и в математике нередко «плавают». С этим приходится мириться, помня, что умение не переживать по поводу того, чего не можешь изменить, — это божий дар.

2.4 Очень важный параграф

Первое. Сказано ли главное об отрицательных числах выше? Не совсем. Конечно, по сути оговорено, что отрицательное число — это абстракция, выдуманный трюк, фикция⁷⁾. И это принципиальный момент. Люди обычно наделяют символические вещи случайными атрибутами, а потом страдают от расщепления сознания. Скажем, думают об отрицательных числах как о долгах или убытках на фоне прибылей. И тогда вопрос типа

 «почему $(-1) \times (-2) = +2$?» — не получает ответа. (2.7)

Блез Паскаль, например, предпочитал равенства типа $0 - 5 = 0$. Ибо ему чудилось, что из «ничто» сколько ни вычитай — Оно не меняется. Поэтому, какой спрос с Василя Иваныча, который «кровь сдал, мочу сдал, на арифметике — завалился». Тут выдающийся учёный, хотя и не начдив Красной армии, но тоже обойтись без тараканов в голове не сумел.

Короче, отрицательные числа — продукт игры воображения, но они, как зеркало, способны отражать взаимоотношения реального мира. Вот так о них и надо думать, а не заземлять их на частности, оставляя в плену случайных интерпретаций.

Второе. Отрицательные числа, разумеется, были придуманы, чтобы операция вычитания была всегда выполнима. Проблему решает \mathbb{Z} , и сказке вроде бы конец. Однако расширением игровой площадки \mathbb{N} до \mathbb{Z} автоматически достигнута гораздо более великая цель, что осталось за кадром. И на это надо обратить внимание.

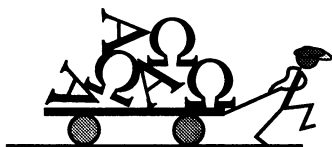


Итак, *третье* — самое главное. Играя в арифметику на той или иной площадке, в данном случае \mathbb{N} , мы сталкиваемся с тем, что «мяч» то и дело улетает в аут. И тогда возникает естественная идея так расширить \mathbb{N} до какого-нибудь \mathbb{Z} , чтобы манипулирование⁸⁾ с числами из \mathbb{Z} не выводило за пределы \mathbb{Z} .

⁷⁾ Как шахматный ферзь, выполняющий в игре определённую роль, которая никак не связана с воплощением в той или иной форме.

⁸⁾ На основе хотя бы сложения и вычитания.

В качестве \mathbb{Z} мы взяли всевозможные $a \pm b$, где $a, b \in \mathbb{N}$. И нам повезло, мы сразу получили игровую площадку, *замкнутую по сложению и вычитанию*. Могло ведь получиться, что $a \pm b$ для некоторых $a, b \in \mathbb{Z}$ окажется за пределами \mathbb{Z} . И тогда снова пришлось бы расширять \mathbb{Z} . Слава богу, обошлось⁹⁾. А что касается вопроса (2.7), так на сложении/вычитании свет клином не сходится. В арифметике есть ещё умножение и другие операции, каковые должны удовлетворять определённым свойствам не только на \mathbb{N} , но и на расширениях, см. разделы 3.7, 3.8. И если мы хотим, например, иметь $x^2 > 0$ при любом $x \neq 0$, то минус на минус при умножении должен давать плюс.



Но вернёмся к нашим баранам. *Идея расширения игровых площадок пронизывает всю математику.* При этом ориентиром всегда служит замкнутость расширения по рассматриваемым типам операций. В данном случае переход от \mathbb{N} к \mathbb{Z} обеспечивает замкнутость по сложению, вычитанию и умножению. *Делается это для того, чтобы потом можно было свободно обращаться с равенствами и неравенствами, упрощая их или вообще приводя к виду, удобному для тех или иных целей.*

Итак, ещё раз. Множество \mathbb{Z} образовалось как совокупность разностей $a - b$ для любых $a, b \in \mathbb{N}$. Но от такой формулировки круги по воде не расходятся. Настоящая причина целесообразности перехода к \mathbb{Z} остаётся вне поля зрения. Сверхзадача в другом: надо, чтобы из $a, b \in \mathbb{Z}$ следовало $a \pm b \in \mathbb{Z}$. Тогда складывать и вычитать на \mathbb{Z} можно без опасений, что результат уйдёт за пределы \mathbb{Z} , т. е. \mathbb{Z} оказывается *замкнутой игровой площадкой*, что даёт образец, стереотип мышления, действуя по которому вводят *дробные, действительные* и другие числа. Кстати, расширение до *замыкания по сложению* множества $\{1\}$, состоящего из одной единички, приводит к \mathbb{N} , а расширение до *замыкания по сложению и вычитанию* — даёт опять-таки \mathbb{Z} .

⁹⁾ Но так везёт не всегда, см. п. 2.6.

2.5 Рациональные числа

Дроби, или *рациональные числа* $x = \frac{b}{a} = b/a$ представляют собой «результат» деления b на a для любых $a, b \in \mathbb{Z}$, исключая $a = 0$.

Сказано-то не слишком аккуратно. Математики бы нас засмеяли. Какой такой «результат», если 5 на 7 не делится. Образуется порочный круг. Дробь $\frac{5}{7}$ — это результат $5 : 7$, а результат $5 : 7$ — это дробь $\frac{5}{7}$. Дотошные профессора тут вывернулись бы по-другому. Например так. Если танцевать от \mathbb{Z} , то дробь $\frac{b}{a}$ — это пара чисел из \mathbb{Z} , где b называется *числителем*, $a \neq 0$ — *знаменателем*¹⁰⁾. Далее привели бы правила для арифметических операций с дробями.

(i) Дробь не меняется при умножении числителя и знаменателя на одно и то же число, $\frac{b}{a} = \frac{bk}{ak}$, $k \neq 0$.

(ii) Для дробей с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{b}{a} \pm \frac{c}{a} = \frac{b \pm c}{a}; \quad \frac{b}{a} \times \frac{c}{a} = \frac{b \times c}{a \times a}; \quad \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b}{c}. \quad (2.8)$$



Диофант (III в.)

И лишь потом позволили бы себе обсудить возможные интерпретации дробей. Например, как точек на прямой.

Учителя начальных классов ужаснулись бы, конечно, и мы на их стороне. Какая там аккуратность, когда психическое здоровье малыши может пострадать. Жизнь вообще не очень аккуратна. Приблизительна, так сказать. Учимся неточно, потом вырливаем из заблуждений, будь они неладны. Математиков же учат скрупулёзно, тщательно. Из них в итоге такие умники вырастают, что они по умственным лабиринтам ужом проползают, чтобы добиться ощущения полёта орла.

Что касается правил (i), (ii), то их вроде маловато, но во взаимодействии они остальное исчерпывают. Свойство (i) любые дроби

¹⁰⁾ Если уж заодно, то в частном $\frac{b}{a} = b : a$ число b называется *делимым*, a — *делителем*. Дробь $\frac{b}{a}$ *несократима*, если у a и b нет общего делителя.

$\frac{b}{a}, \frac{p}{q}$ позволяет перевести в эквивалентные с равными знаменателями $\frac{b}{a} = \frac{bq}{aq}, \frac{p}{q} = \frac{pa}{aq}$, после чего любой вопрос решается с помощью (2.8).

Совокупность всевозможных дробей $\frac{b}{a}$, где $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$, называют *множеством (полем) \mathbb{Q} рациональных чисел*. В \mathbb{Q} , понятное дело, разрешимо любое уравнение

$$a \cdot x = b, \quad a \neq 0. \quad (2.9)$$

Решением служит $x = \frac{b}{a}$, причём уравнение (2.9) оказывается разрешимым и для дробных a и b . Могло быть хуже. Инкарнация дробей, как решений (2.9) при целых a и b , могла бы не обеспечить разрешимости (2.9) для дробных a и b . И это в некотором роде была бы катастрофа. Пришлось бы вводить новые числа: сначала дроби, потом дроби дробей и т. д. Нам опять повезло — не потребовалось. Да ещё оказалось

$$\lambda \frac{b}{a} + \mu \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \quad \text{👤}$$

если $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$. Иначе говоря, множество *рациональных чисел (дробей)*, обозначаемое символом \mathbb{Q} , **замкнуто в арифметике**, т. е. относительно арифметических операций.

2.6 Корни целой степени

Корень квадратный из b — это некое x , которое при возведении в квадрат даёт b , т. е. $x^2 = b$. Возжелав по этой причине разрешимости уравнения $\boxed{x^2 = b}$ при любом $b \in \mathbb{N}$, мы сталкиваемся с необходимостью расширения \mathbb{Q} . Дробей не хватает. Приходится добавлять *иррациональные числа*, но как? Решением $x^2 = 4$ является $x = 2 = \sqrt{4}$. Но что если $x^2 = 5$? Может быть найдётся несократимая дробь $\frac{b}{a} = \sqrt{5}$? Не найдётся.

Из $\frac{b}{a} = \sqrt{5}$ следует $b^2 = 5a^2$, откуда вытекает, что b^2 делится на 5, а значит и на 25, но тогда a делится на 5, что противоречит несократимости $\frac{b}{a}$.



Поэтому при желании располагать решениями уравнения $x^2 = b$ квадратные корни \sqrt{b} приходится добавлять к полю \mathbb{Q} рациональных чисел. Но вот с замкнутостью в арифметике выходит загвоздка, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ не является корнем из какого-либо p , а добавление к \mathbb{Q} всевозможных сумм $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ не даёт замкнутости, поскольку $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$, например, не представимо в виде $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Поэтому с иррациональностями не всё так просто, и вопрос имеет смысл отложить.

Интересно, что «двумерные» числа $a + b\sqrt{3}$ с рациональными a, b образуют замкнутую арифметическую площадку¹¹⁾ (проверьте). Такую же удобную площадку образуют и числа вида $a + b\sqrt{-3}$, если, не мудрствуя лукаво, считать $(\sqrt{-3})^2 = -3$.

2.7 Бьющий по мозгам пример

Очень важно понимать, что «числа» из всяких «расширений» упрощают жизнь и наращивают инструментальные возможности. Вот простенькая иллюстрация.

Рассмотрим числовой ряд

$$1, 1, 3, 5, 11, 21, \dots, \quad (2.10)$$

устроенный по правилу



$$s_{n+2} = s_{n+1} + 2s_n. \quad (2.11)$$

Поиск n -го члена в виде $s_n = x^n$ после подстановки в (2.11) даёт $x^{n+2} - x^{n+1} - 2x^n = 0$, что после сокращения на x^n приводит к необходимости решения квадратного уравнения

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

корни которого $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. Поэтому закону (2.11) удовлетворяет как $s_n = x_1^n$, так и $s_n = x_2^n$, а также их линейная комбинация

¹¹⁾ С той же скидкой на запрет деления на нуль.

$$s_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n$$

при любых α и β . Выбирая α и β из условия $s_1 = s_2 = 1$, получаем

$$s_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}. \quad (2.12)$$

Обратим внимание, что ряд (2.10) содержит только числа натурального ряда. А вот искомая формула (2.12) включает и отрицательные числа, и дроби. И без «расширений» вообще не могла быть найденной.

2.8 Десятичные дроби

Особая роль десятичных дробей связана с тем, что мы пользуемся десятичной позиционной системой записи целых чисел, с помощью 10 цифр $a_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

$$a_n \dots a_1 a_0 = a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0. \quad (2.13)$$

Расширение идеи (2.13) на дробные числа приводит к суммам

$$a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 + \underline{b_1 \cdot 10^{-1} + b_2 \cdot 10^{-2} + \dots}, \quad (2.14)$$

которые в позиционном виде записываются как

$$a_n \dots a_1 a_0, b_1 b_2, \dots, \quad (2.15)$$

т. е. коэффициенты дробной, подчёркнутой в (2.14), части располагаются после запятой. Например,

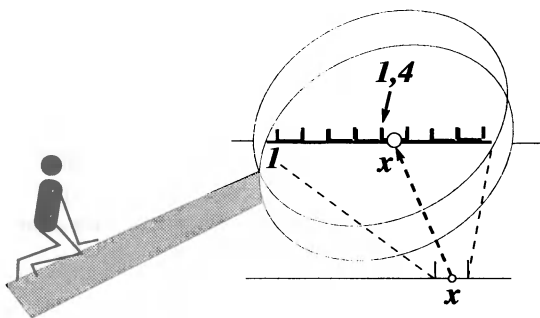
$$2,371 = 2 \frac{371}{1000} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{1}{1000}.$$

Чтобы дробь $\frac{p}{q}$ перевести в десятичную, достаточно p разделить на q столбиком. Допустим, соседка попросила разделить ей 2 на 3. Тут проще разделить, чем объяснять, что не хочется.

где на прямой точка $\sqrt{2}$, не совпадающая ни с одной дробью¹³⁾? Корню из 2 отвечает *бесконечная десятичная дробь*

$$\sqrt{2} = 1,414213562373 \dots,$$

получаемая применением вычислительного алгоритма извлечения корня (раздел 3.6), и ей можно сопоставить точку на прямой, к которой в пределе приближается следующая процедура. Отрезок $[1, 2]$ делим на 10 равных сегментов. Правый конец 4-го сегмента отвечает числу 1,4. Затем 5-й сегмент делим на 10 равных подсегментов, конец 1-го подсегмента отвечает числу 1,41 и т. д.



Такого сорта процедура любой конечной или бесконечной десятичной дроби сопоставляет точку. И наоборот, любой точке — дробь¹⁴⁾.

Бесконечные десятичные дроби вида (2.15) называют *вещественными числами*, а совокупность таких чисел называют *вещественной прямой*, и обозначают её как \mathbb{R} , или $(-\infty, \infty)$. Арифметические операции на \mathbb{R} по свойствам совпадают с аналогичными операциями на множестве рациональных чисел \mathbb{Q} .

Конечно, кое-что здесь требует уточнения. Особенно с точки зрения тех, кто «перестал понимать простые вещи». В пятом-то классе им всё было ясно. Но потом начинают чудиться всякие подводные рифы, и возникает аллергия на логические неточности. Но всему своё время,

¹³⁾ Насчёт $\sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$ см. раздел 2.6

¹⁴⁾ Отрезки разбиваем на части, смотрим, в каком сегменте точка находится, этот сегмент разбиваем на подсегменты и т. д. В результате последовательно выписывается дробь.

в том числе — аллергии. Так что оставим пока понятие вещественного числа в обозначенном приблизительном состоянии¹⁵⁾.

2.10 Что делать, если ум заходит за разум

Время от времени ум имеет свойство заходить за разум у любого нормального человека. Этого не надо стесняться. И при накатывающей неясности необходимо **спрашивать: что, где, как, почему?** Спрашивать у всех подряд. Вплоть до неприличия.



Если кому-то кажется, что, спрашивая, вы теряете очки, посмотрите на маленьких детей. Они бесконечно задают вопросы. Они наивны, простодушны, не имеют представления о своих недостатках. Их все любят, и они прогрессируют с фантастической скоростью.

Затем человек перестаёт жить и начинает «производить впечатление», «делать вид». Прогресс замедляется до черепашьего темпа. Так что перестаньте водить за нос Вселенную, откройтесь и спрашивайте, если чего-то не понимаете.

Надо ли брать гитару в руки? Разумеется, глупо спрашивать там, где решение проблемы не находится во вне. Скажем, перечитав все учебники по игре на гитаре, наслушавшись учителей, но так и не научившись играть, — что вы станете делать? Далее спрашивать? — Едва ли. Потому что тут ясно, надо брать гитару в руки и тренироваться, пробовать. Помощь извне не может заменить требуемые самостоятельные усилия. С математикой такая же история.

¹⁵⁾ Тем более что оно устраивало многих великих математиков. Строгая теория вещественных чисел появилась сравнительно недавно, во второй половине XIX века.

2.11 Отношения и пропорции

В ситуации

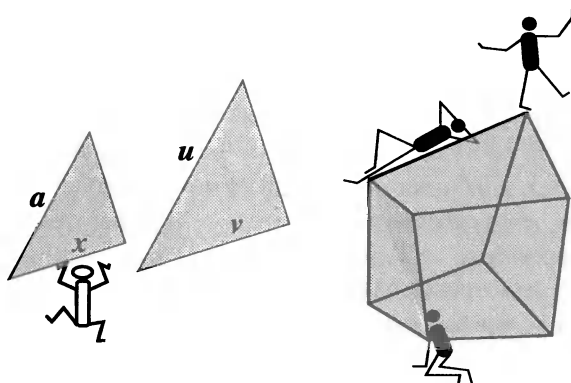
$$a : b = u : v$$



(2.17)

говорят « a относится к b как u к v ». Соотношение (2.17) можно переписать в виде $\frac{a}{b} = \frac{u}{v}$ либо $a \cdot v = u \cdot b$, что из $\frac{a}{b} = \frac{u}{v}$ получается умножением на bv .

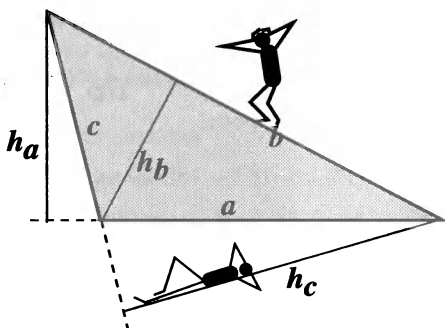
В любом случае речь идёт о взаимоотношении четырёх чисел, что инструментально может работать в разных обстоятельствах. Скажем, если одно из «действующих лиц» не дано, $\frac{a}{x} = \frac{u}{v}$, неизвестное мгновенно вычисляется $x = \frac{av}{u}$, что может решать, например, задачу «на сколько км хватит 40 литров бензина, если на 100 км уходит 7 литров». Это может быть также определением стороны треугольника, исходя из соображений подобия:



Манипулирование пропорциями (2.17) бывает многограннее. Рассмотрим задачу *построения треугольника по трём высотам*.

Пусть h_a обозначает высоту, опущенную на сторону a .

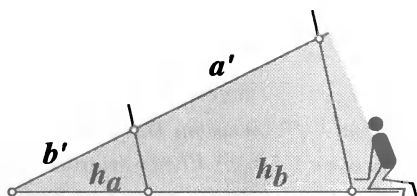
Так же маркируем высоты h_b и h_c .



Так как $a \cdot h_a = b \cdot h_b = 2S$, S — площадь треугольника, то

$$a \cdot h_a = b \cdot h_b \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a},$$

т. е. *стороны обратно пропорциональны высотам*. Это и есть ключ к задаче. По данным высотам строим отрезки a' , b' , c' . Сначала a' , b' «от фонаря» с помощью какого либо трюка:



затем c' по тому же рецепту, но уже при заданном a' . Далее строим треугольник со сторонами a' , b' , c' , проводим у него высоты и выясняем, в какой пропорции они находятся к исходным¹⁶⁾. В этой пропорции меняем a' , b' , c' — получаем искомый треугольник. Всё!

¹⁶⁾ Достаточно определить какое-нибудь одно соотношение $h'_a : h_a$.

2.12 Проценты, будь они неладны

С процентами нередко путаются, потому что с ними довольно часто сталкиваются. А не потому, что они сложны.

Итак, 1% от некоторого количества — это $\frac{1}{100}$ его часть, доля. Вот и вся теория. Остальное — задачи.

- 18% от 1000 *тонн* — это $0,18 \cdot 10^3 = 180$ *тонн*.
- Сколько процентов составляют 5 от 7 (неважно чего)?

$$\begin{array}{ccc} 5 & |7 & \\ \dots & 0,714\dots & \end{array} \rightarrow \frac{5}{7} = 0,714 = 71,4\%$$

с точностью до десятых долей процента.

$$\text{А 7 от 5?} \rightarrow \frac{7}{5} = 1,4 = 140\%$$

• Если 92% своей 12-летней жизни вы были счастливы, значит 11 лет¹⁷⁾ вы катались как сыр в масле. Год ушёл в песок.

• *Партия в 100 кг ягод, имеющих влажность 99%, маленько усохла на складе — влажность упала до 98%. Какова потеря веса?*

«Вначале было 99 кг воды и 1 кг «витаминов»», — саркастически сказали бы циники. Пусть x — вес партии после усыхания. Тогда



$$\frac{x-1}{x} = 0,98 \rightarrow x = 50 \text{ кг.}$$

То есть 50 кг воды испарилось! Не может быть! Влажность снизилась на 1%, а воды улетучилось 50 кг! Когда выясняется, что может, начинают хохотать, потому что в голове не укладывается.

Шоковые обстоятельства последней задачи иногда подталкивают к мысли, что в тихом омуте черти водятся. Дескать, проценты — ох, как непросты. Так проценты здесь ни при чём! Причины возможной истерики здесь в инерции мышления и заблуждениях интуиции¹⁸⁾. Такое случается в любой области.

¹⁷⁾ $0,92 \times 12 = 11,04$ года.

¹⁸⁾ О «малых причинах — больших последствиях» любят поговорить,

2.13 Операции с множествами

Время от времени мы будем иметь дело с множествами. Не обязательно с конечными или бесконечными типа \mathbb{N} , но и с континуальными типа *вещественной прямой* \mathbb{R} либо плоскости \mathbb{R}^2 , а то и трёхмерного пространства \mathbb{R}^3 . На прямой \mathbb{R} часто рассматриваются подмножества:

интервал (a, b) — множество точек x , удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$,

сегмент, или *отрезок*, $[a, b]$ — множество точек x , удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$.

Таким образом круглая скобка в обозначении диапазона от a до b исключает концевую точку. При такой трактовке появляется возможность «стенографировать» различные комбинации:

$$(a, b] \Leftrightarrow a < x \leq b; \quad [a, \infty) \Leftrightarrow a \leq x < \infty \text{ и проч.},$$

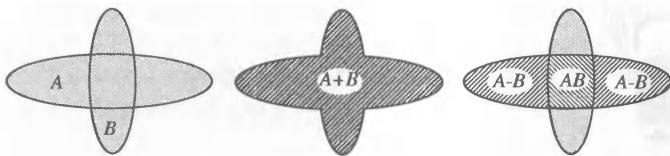
где ∞ обозначает бесконечность.

Множества, как правило, обозначают большими буквами, элементы — малыми. Запись $x \in X$ ($x \notin X$) обозначает, что элемент x принадлежит (не принадлежит) множеству X . Включение « A является подмножеством множества B » записывается как $A \subset B$.

$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ обозначают, соответственно, *объединение*, *пересечение* и *разность множеств*. Используются также эквивалентные обозначения:

$$A + B = A \cup B, \quad A \cdot B = A \cap B, \quad A - B = A \setminus B.$$

Геометрические образы перечисленных действий,



способствуют наглядному пониманию и запоминанию¹⁹⁾.

но думают обычно, что малым изменениям условия задачи обязаны отвечать малые изменения решения. Тут тебе, бабушка, и Юрьев день.

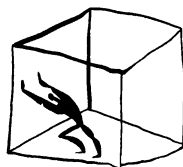
¹⁹⁾ Идея Гельвеция насчёт знания общих принципов, возмещающего незнание отдельных фактов, — в определённой степени обратима.

Глава 3

Натуральный ряд

*Существует достаточно света для тех,
кто хочет видеть,
и достаточно мрака для тех,
кто — не хочет.*
Паскаль

«Математика никогда не достигла бы такой степени совершенства, не приложи древние столько усилий для изучения вопросов, которыми сегодня многие пренебрегают из-за их мнимой бесплодности», — писал Эйлер.



3.1 Позиционная система счисления

Многие гениальные вещи мы недооцениваем из-за их привычности. Взять хотя бы десятичную запись натуральных чисел.



$$3245 = 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5.$$

Что здесь удивительного? Удобно, разумеется, $n + 1$ цифр

$$a_n, \dots, a_1, a_0,$$

все $a_j < 10$, справляются с описанием 10^{n+1} чисел,

$$a_n \dots a_1 a_0 = a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0, \quad (3.1)$$

так на то она и **комбинаторика (!)**, см. главу 9.

Но когда задумаешься, что было бы с математикой, если бы римская запись чисел одержала верх, — оторопь берёт. От домашних заданий с ума можно было бы сойти. А тут всё относительно просто. Можно даже обходиться без калькулятора:

$$\begin{array}{r}
 3217 \\
 + 591 \\
 \hline
 3808
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{сидит} \\
 \text{и считает}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{идёт} \\
 \text{и считает}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 46 \\
 \times 18 \\
 \hline
 368 \\
 + 46 \\
 \hline
 828
 \end{array}
 \quad (3.2)$$

Так же просто жернова арифметики перерабатывают и десятичные дроби. Надо лишь обратить внимание на регламент. Если, скажем, при сложении целых чисел столбиком числа надо выравнивать по правому краю (по младшему разряду), то при сложении дробных чисел выравнивание влево/вправо надо производить по запятой¹⁾.

$$\begin{array}{r}
 957,481 \\
 + 123,3348 \\
 \hline
 1080,8158
 \end{array}
 \quad (3.3)$$

Правило (3.1) характеризует десятичную систему, *k*-ичная система строится аналогично:

$$a_n \dots a_1 a_0 = a_n \cdot k^n + \dots + a_1 \cdot k + a_0, \quad a_j < k. \quad (3.4)$$

Представление (3.4) любого числа *A* однозначно. При делении нацело *A* на *k* в остатке получается *a*₀. При делении частного (полученного на предыдущем шаге) снова на *k* — в остатке получается *a*₁. И так далее.

Двоичная система счисления является частным случаем *k*-ичной. В случае *k* = 2 делить надо все время пополам — остатки будут нулями и единицами. Например, $33 = 2^5 + 1$, т. е. в двоичной системе $33_{10} = 100001_2$. Натуральный ряд записывается так:

1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, ... и т. д.

Хороший пример — игра «Ним». В каждой кучке по *n_k* спичек. Двое берут по очереди любое количество (≥ 1) спичек,

¹⁾ Собственно, опять по младшему разряду целой части.

но каждый раз только из одной кучки. Кому в итоге нечего брать — тот и проиграл.



Выглядит просто, однако, выигрывающий алгоритм найти трудно, пока не приходит идея записать все n_k в двоичной системе. Тогда вычисляется поразрядная сумма σ всех n_k по модулю 2: если сумма единиц в разряде чётная, пишется 0; если нечётная — 1. Чтобы выиграть, надо противнику все время оставлять σ из одних нулей. Пояснения см. на oschool.ru (*Системы числения*). Там описан удобный вариант игры на шахматной доске.

При каких n числа $2^n - 1$ делятся на 7? Вопрос удобно решается в двоичной системе, в которой (при позиционной записи):

$$(2^n - 1)_{10} = \underbrace{11 \dots 1}_n_{2}, \quad 7_{10} = (2^3 - 1)_{10} = 111_2.$$

Поэтому при делении столбиком остаток равен нулю только при $n = 3k$.

3.2 Простые числа

1. Число $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 1$, называют **простым**, если оно делится только на 1 и само на себя. Остальные

$$n \in \mathbb{N}, \quad n \neq 1,$$

называют **составными числами**.

2. **Теорема Евклида.** Простых чисел бесконечно много.



Евклид (III в. до н. э.)

◀ Допустим противное, множество простых чисел конечно, p_1, \dots, p_n . Но тогда любой простой делитель числа $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ отличается от любого p_1, \dots, p_n . ▶

Формулировка некоторых фактов здесь может производить странное впечатление из-за их якобы очевидности. Например:

3. *Наименьший отличный от единицы делитель целого, большего единицы, является простым числом.*

4. *Наименьший отличный от единицы делитель составного числа n не превосходит \sqrt{n} .*

Утверждения типа 3., 4. представляются банальными при поверхностном подходе к теории чисел. Но попытки выйти за пределы \mathbb{Z} вдруг обнаруживают, что не все тривиальное в обычной арифметике переносится за пределы \mathbb{Z} либо переносится «с трудом», см. § 3.3, о короткой арифметике Гильберта.

Для составления таблицы простых чисел, не превосходящих данного N , может быть использовано *решето Эратосфена*. Рецепт заключается в вычеркивании из ряда

$$1, 2, \dots, N$$

сначала всех чисел кратных двум, кроме самой двойки, затем — трем, кроме самой тройки, затем — пяти, кроме самой пятерки²⁾, и т. п. По завершению процесса невычеркнутыми остаются все простые числа меньше N .

Таким образом, простые числа элементарно характеризуются и легко перечисляются. Все как бы на виду, а ухватиться не за что. Закономерности ряда



$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots, p_r, \dots$$

скрыты. Простейшие на вид вопросы не имеют ответа.

Наиболее известны: *проблема Гольдбаха* — состоящая в предположении, что любое чётное $n \geq 4$ представимо в виде суммы

²⁾ На каждом следующем этапе выбирается первое невычеркнутое число из «нетронутых» ранее.

двух простых чисел, и *проблема чисел-близнецов*³⁾. Та и другая не решены до сих пор.

Загадочные обстоятельства сопутствуют почти всем попыткам разобраться в «атомарной структуре» натурального ряда. Есть предположение, например, что *всякое чётное n бесконечным количеством способов представимо в виде разности двух последовательных простых чисел*. Однако не доказано даже, что любое чётное n представимо в виде разности двух **каких-нибудь** простых чисел хотя бы одним способом. Богатые коллекции безответных вопросов разбросаны по литературе. Не все они, конечно, того же калибра, что и *проблема Гольдбаха*, но о масштабе «недавних» задач не всегда легко судить. Безделица иногда оборачивается проблемой века, а солидная с виду задача — лопаётся как мыльный пузырь.

3.3 Основная теорема арифметики

Таковой называют *теорему о единственности разложения* всякого целого числа *на простые множители*.

1. Теорема. *Всякое $n \in \mathbb{N}$ однозначно разлагается в произведение простых сомножителей, с точностью до их порядка*⁴⁾.

◀ Пусть p_1 — наименьший делитель n . Тогда $n = p_1 n_1$. Если $n_1 > 1$ и p_2 — его наименьший делитель, то $n_1 = p_2 n_2$. Если $n_2 > 1 \dots$ то $n_2 = p_3 n_3$, и так продолжаем, пока не достигнем значения $n_k = 1$. В итоге

$$n = p_1 p_2 \cdots p_k. \quad (3.5)$$

Допустим, существует другое разложение на простые сомножители



$$n = q_1 q_2 \cdots q_l = p_1 p_2 \cdots p_k \quad (3.6)$$

³⁾ Существует ли бесконечно много пар простых чисел-близнецов, отделённых друг от друга всего одним числом. Все пары простых близнецов, кроме (3, 5) имеют вид $6n \pm 1$. На данный момент наибольшая известная пара $3756801695685 \cdot 2^{666669} \pm 1$.

⁴⁾ Разумеется, $n \neq 1$, ибо единица не считается простым числом.

Обе части (3.6) делятся на q_1 — поэтому какое-то p_i делится на q_1 . Как простое число, p_i не имеет нетривиальных делителей, следовательно $q_1 = p_i$. Аналогично q_2 равно какому-то p_j и так далее, до исчерпания либо всех q_s , либо всех p_t . Но если q_s и p_t не кончаются одновременно — возникает противоречие, что доказывает единственность разложения (3.5). ►

Сомножители в (3.5) могут повторяться, в связи с чем *каноническое разложение* записывают в форме

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}.$$



(3.7)

Простые числа таким образом являются атомами, из которых состоят «молекулы» натурального ряда $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, и потому представляют первостепенный интерес, как *периодическая таблица Менделеева* в химии.

Обоснование единственности разложения (3.5) кое-кому представляется излишней роскошью, ибо все доказательство теоремы 1. опирается на два тривиальных — по крайней мере очень легко устанавливаемых — факта: п. 3. и

2. *Если произведение делится на простое p , то хотя бы один из сомножителей делится на p .*

Да и сама *теорема 1.* на этом фоне вместе с ее заурядным доказательством выглядит банальной. Но скрытые пружины дают о себе знать при попытке сменить игровое поле. В других числовых системах возникают новые обстоятельства, о чем далее не раз будет заходить речь. Возможные трудности вскрываются элементарным примером *короткой арифметики Гильберта* на множестве \mathbb{G} чисел вида $4k + 1$,

$$\mathbb{G} = \{1, 5, 9, 13, 17, \dots\},$$

с единственной операцией обычного умножения, не выводящего из \mathbb{G} . Число 693 в \mathbb{G} раскладывается на простые множители двумя способами:

$$693 = 21 \cdot 33 = 9 \cdot 77,$$

что даёт пример нетривиального равенства (3.6). Не простые в \mathbb{N} сомножители 9, 21, 33, 77 просты в \mathbb{G} .

3.4 Делимость, НОД и НОК

1. Наибольшим общим делителем (НОД) целых

$$a, b, \dots, s \in \mathbb{Z}$$

называется наибольшее положительное число

$$d = (a, b, \dots, s), \quad (3.8)$$

делящее нацело каждое из $a, b, \dots, s \in \mathbb{Z}$.

Круглые скобки слишком популярны, чтобы из возникающих ассоциаций каждый раз выбирать правильное толкование. Поэтому вместо (3.8) чаще используется обозначение

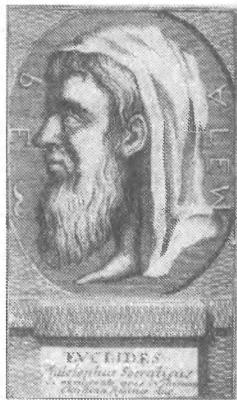
$$d = \text{НОД} (a, b, \dots, s).$$

Поиск НОД (a, b) обеспечивает **алгоритм Евклида**, работающий в предположении $a > b$ следующим образом. Впрочем, для понимания эффективнее частный пример.

Поиск НОД (327, 234):

$$\begin{aligned} 327 &= 234 \cdot 1 + 93 \\ 234 &= 93 \cdot 2 + 48 \\ 93 &= 48 \cdot 1 + 45 \\ 48 &= 45 \cdot 1 + \underline{3} \\ 45 &= \underline{3} \cdot 15. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В итоге $\text{НОД} (327, 234) = 3$. Первая строка (3.9) получается делением 327 на 234, и означает, что $\text{НОД} (327, 234) = \text{НОД} (234, 93)$. Далее 234 делится на 93, получается вторая строка, сводящая поиск $\text{НОД} (234, 93)$ к поиску $\text{НОД} (93, 48)$, и т. д. Остаток от деления на каждом шаге строго уменьшается. Последний ненулевой остаток и есть искомый НОД.



Наибольший общий делитель более двух чисел, НОД (a_1, \dots, a_n) , сводится к определению НОД пар чисел:

$$(a_1, a_2) = d_2, \quad (d_2, a_3) = d_3, \quad \dots \quad (d_{n-1}, a_n) = d_n, \quad (3.10)$$

что даёт искомый результат,

$$\text{НОД } (a_1, \dots, a_n) = d_n. \quad (??)$$

2. Наименьшим общим кратным⁵⁾ (НОК) целых

$$a, b, \dots, s \in \mathbb{Z}$$

называется наименьшее положительное число

$$m = [a, b, \dots, s], \quad (3.11)$$

делящееся нацело на каждое $a, b, \dots, s \in \mathbb{Z}$.

$$[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}. \quad (??)$$

Аналогично (3.10) НОК (a_1, \dots, a_n) сводится к определению НОК пар чисел. Последовательное вычисление

$$[a_1, a_2] = m_2, \quad [m_2, a_3] = m_3, \quad \dots \quad [m_{n-1}, a_n] = m_n \quad (3.12)$$

даёт искомый результат,

$$\text{НОК } (a_1, \dots, a_n) = m_n. \quad (??)$$

⁵⁾ Число a считается **кратным** b , если оно делится на b . В этом случае также пишут: $b \mid a$ — « b делит a », т. е. a делится нацело на b .

⁶⁾ *Подсказка:* произведение ab , безусловно, кратно и a , и b , но (a, b) в ab входит в квадрате, т. е. лишний раз.

3.5 Признаки делимости

Время от времени возникает необходимость понять, делится ли a на b без остатка. Для малых b иногда можно ответить на вопрос быстро, не производя деления. Скажем, в силу представления любого числа

$$A = a_n \dots a_1 a_0 = 10 \cdot a_n \dots a_1 + a_0, \quad (3.13)$$

понятно, если число единиц a_0 в десятичной записи числа A делится на 2 или на 5, то и A делится на 2 или на 5 — потому что слагаемое $10 \cdot a_n \dots a_1$ в (3.13) делится и на 2, и на 5, поскольку $10 = 2 \cdot 5$. Разумеется, $a_0 = 0$ тоже устраивает. Вообще удобно считать, что 0 делится на любое число без остатка.

Поэтому признаки делимости на 2 и 5 совсем простые. Заключение делается по одной лишь последней цифре. А из

$$A = a_n \dots a_1 a_0 = 100 \cdot a_n \dots a_2 + a_1 a_0$$

сразу видно, что для делимости A на 4 или 25 требуется делимость на 4 или 25 числа $a_1 a_0$ из последних двух цифр, в том числе $a_1 a_0 = 00$.

На 3 и на 9 число делится, если на 3 и на 9 делится, соответственно, его сумма цифр, поскольку

$$a_n \dots a_1 a_0 = 10^n a_n + \dots + 10 a_1 + a_0 =$$

$$= (10^n - 1)a_n + \dots + (10 - 1)a_1 + \underline{a_0 + a_1 + \dots + a_n},$$

ибо на 3 и на 9 делятся все множители $10^k - 1$, и вопрос упирается в подчёркнутую сумму цифр.

3.6 Алгоритмы вычислений

Считаем, что *сложение/вычитание и умножение столбиком* — общеизвестны. Правда, на персональные мозги уже мало кто опирается, когда калькулятор под рукой. Но ручные *алгоритмы*⁷⁾ — поддерживают форму, в том числе физическую. Так


⁷⁾ *Алгоритм* — это процедура достижения результата на основе предписания, регламентирующего порядок действий.

что не стоит ими пренебрегать. И вообще, тезис «как бы не выучить чего лишнего» — очень сильно вредит здоровью. Вспомните и освоите хотя бы *деление столбиком*. Вот пример деления с остатком



$$\begin{array}{r|l} 235 & \overline{17} \\ -17 & 13 \\ \hline 65 & \\ -51 & \\ \hline 14 & \end{array}$$

→




$$\frac{\quad}{235 = 17 \cdot 13 + 14}$$

и без остатка



$$\begin{array}{r|l} 574 & \overline{7} \\ -56 & 82 \\ \hline 14 & \\ -14 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

→



$$\frac{\quad}{574 = 7 \cdot 82}$$

Объяснение, почему это работает, можно воспринимать как упражнение, значительно улучшающее мозговое кровообращение.

Что касается рецептов извлечения корня, то их многообразие покрывается ныне плесенью. Конкуренцию выигрывает простое нажатие кнопки на компьютере. Вот особенный алгоритм

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{A}{2x_n}, \quad (3.14)$$

вычисляющий \sqrt{A} *итерационно*, т. е. последовательные приближения x_n сходятся к \sqrt{A} по мере увеличения n , $x_n \rightarrow \sqrt{A}$. Процедура (3.14) сходится с фантастической скоростью. Вычисляя, например, $\sqrt{2}$, $A = 2$, $x_0 = 2$, дюжина итераций (3.14) даёт **тысячу (!)** верных знаков после запятой, $\sqrt{2} = 1,414213562373 \dots$

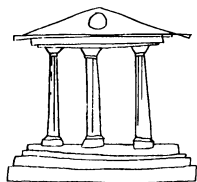
Небольшая модификация (3.14) вычисляет $\sqrt[k]{A}$,

$$x_{n+1} = \frac{(k-1)x_n + \frac{A}{x_n^{k-1}}}{k}, \quad \Rightarrow \quad x_n \rightarrow \sqrt[k]{A}. \quad (3.15)$$

Насчёт происхождения алгоритмов типа (3.15) см. главу 7.

3.7 О фундаменте арифметики

Обычная *Арифметика* покоится на *аксиоматике Пеано*⁸⁾, каковая в школе, слава богу, обходится стороной. Но на какие-то основания всё равно приходится опираться, хотя бы на свойства *равенств, неравенств и операций*.



У нас тут с вами, конечно, не энциклопедия, но кое-что имеет смысл упомянуть вскользь, дабы пометить территорию.

- $a = b \Rightarrow a + c = b + c, \quad ac = bc;$
- $a > b \Rightarrow a + c > b + c; \quad ac > bc$ при условии $c > 0; -a < -b;$
- *правило умножения на единицу и прибавления нуля;*
- *коммутативность/ассоциативность сложения и умножения:*

$$x + y = y + x, \quad xy = yx; \quad (x + y) + z = x + (y + z), \quad (xy)z = x(yz);$$

- *дистрибутивный закон* $a(b + c) = ab + ac.$

Всё это давно набило оскомину. Поэтому мы тут не будем особенно задерживаться, ибо при некоторой дотошности здесь можно такой огород нагородить, что ходу дальше уже не будет. Да и начальная школа нас выручает. Она по чуть-чуть внедряет в сознание все эти



$$\begin{aligned} 1^a &= 1, & a^1 &= a, \\ c^{a+b} &= c^a c^b, \\ (ab)^c &= a^c b^c, & (a^b)^c &= a^{bc}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

так что они живут в нас как будто с рождения.

Вопрос в том, откуда перечисленное (а также оставшееся за кадром) берётся. Это что, аксиомы? — В некотором роде. Школа исподволь подводит к естественности свойств типа $x + y = y + x$, исходя из примеров, и мало-помалу убеждает в «истинности» такого рода правил, которые в рамках школьного миропонимания преподносятся как нечто, не требующее строгого обоснования.

⁸⁾ Элементом которой является *метод математической индукции*, п. 13.6.

Обоснование здесь можно сместить в *аксиоматику Пеано*. Там постулатов немного, они достаточно просты и убедительны. И тогда все эти $x + y = y + x$ формально доказываются. Сооружение начинает напоминать *геометрию Евклида*.

3.8 Ещё раз об игровых площадках

Вернёмся к *замкнутости игровых площадок*, каковая обсуждалась в §2.4, и там необходимое уже было сказано. «Сказанное», правда, и «усвоенное» не всегда совпадают. Для перехода одного в другое требуется некоторое хождение *вокруг да около*.

Чтобы абстрактный разговор не повисал в воздухе, замыкаться надо на какую-либо конкретику. Как мы доказываем, например, тождества или неравенства? Скажем,

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \quad \text{или} \quad \frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}, \quad x, y > 0?$$

Доказывая, мы выполняем те или иные преобразования: умножаем, раскрываем скобки, добавляем что-либо или отнимаем — прокладывая дорогу к чему-нибудь безусловному. Например,

$$\begin{aligned} \frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy} &\Rightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow \\ \Rightarrow x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0 &\Rightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Но это, правда, ещё не доказательство, для которого важно понимание того, что путь можно пройти в обратном направлении. От верного $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ к проверяемому $\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Бывает ведь, прибавив к $a > b$ на законных основаниях неравенство $c > d$, получаем $a + c > b + d$. Но из $a + c > b + d$ исходное $a > b$ не следует⁹⁾.

Так что всякое манипулирование нуждается в контроле. Хорошо ещё, что большинство рутинных действий (§3.7) типа

$$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c \quad \text{взаимобратимы.}$$

⁹⁾ К неверному $2 > 3$ прибавляем $5 > 1$, получаем истинное $7 > 4$.

Однако требуется ещё и другой контроль. Манипулируя символами, необходимо иметь гарантии, что в «буквенные писульки» можно подставлять числа. А то вдруг под радикалом, $\sqrt{\dots}$, получится минус после подстановки.



Рассмотрим, для примера, задачу аналогичную (2.10)–(2.12). К числовой последовательности a_n ,

$$1, 1, 0, -2, -4, -4, 0, 8, 16, 16, 0, -32, \dots, \quad (3.17)$$

устроенной по правилу

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n \quad \text{при условии} \quad a_0 = a_1 = 1, \quad (3.18)$$

применим тот же рецепт, что и для (2.10). Получим уравнение

$$x^2 - 2x + 2 = 0. \quad (3.19)$$

Но $x^2 - 2x + 2 > 0$ при любом вещественном x . Мы тут немного забегаем вперёд, но нам подробности здесь не нужны, ибо цель другая. Давайте вопреки всему попробуем воспользоваться формулой

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad (3.20)$$

для корней уравнения $x^2 + px + q = 0$. Корни (3.19) оказываются «странными»

$$x_1 = 1 + \sqrt{-1}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{-1},$$

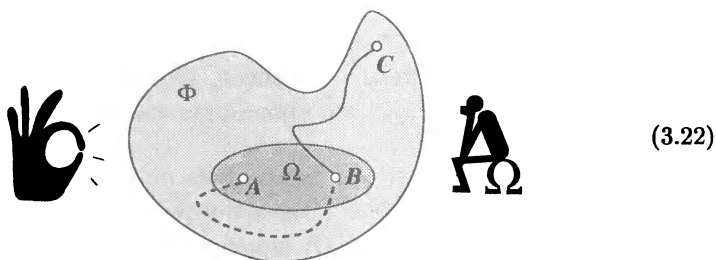
и формула для a_n при условии $a_0 = a_1 = 1$ получается такой

$$a_n = \frac{(1 + \sqrt{-1})^n + (1 - \sqrt{-1})^n}{2}. \quad (3.21)$$

Любопытно, что все нелегальные $\sqrt{-1}$ в нечётных степенях здесь взаимно уничтожаются, и a_n получаются действительными, причём в точности вычисляют a_n из (3.17). Странная картина возникает, даже криминальная в некотором роде. Манипуляции абсолютно незаконны, а результат в итоге — правильный.

Такого рода чудеса должны мобилизовать внимание. Где-то поблизости может таиться открытие. Здесь тот самый случай. Расширение игровой площадки, на которой можно извлекать корни из отрицательных чисел (см. *комплексные числа*) придаёт смысл «абсурду» и даёт в руки инструмент для решения задач, которые иначе не решаются.

На абстрактном уровне речь идёт о следующем. Представим, что у нас есть игровая площадка Ω , эллипс на рис. (3.22), на которой определены какие-то операции. И у нас есть более широкая площадка Φ , на которой определены такие же операции¹⁰⁾.



Представим далее, что на территории Ω сформулированы два утверждения A и B , и нам надо доказать их эквивалентность, т. е. проложить путь из A в B и обратно. Путь — это последовательность шагов, а шаги получаются применением операций к объектам из Ω . И если какие-то операции выводят за пределы Ω , то дорожку « $A \leftrightarrow B$ » внутри Ω то ли трудно найти, то ли её вообще нет. Но если существует территория Φ , *замкнутая по операциям*¹¹⁾ и охватывающая Ω , то путь можно прокладывать и по «чужой» территории, пунктирная AB , что кардинально увеличивает возможности манипулирования.

Выгоды от использования более широкой игровой площадки могут быть и другие. Скажем, нас интересует некий вопрос относительно B , но в рамках Ω ответ найти трудно. Тогда может найтись утверждение C в Φ , эквивалентное B [доказательство — кривая BC на рис. (3.22)]. И там соответствующий вопрос «звучит» на другом языке и в других терминах — и легко решается. Вот такие прибабасы.

¹⁰⁾ Совпадающие на территории Ω с действующими там правилами.

¹¹⁾ Т.е. разрешённые операции всегда дают результат внутри Φ .

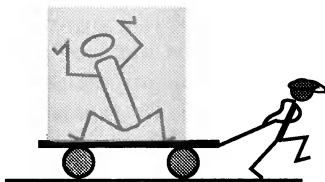
3.9 Когда читать роман «Анна Каренина»

При обучении обычно возникает какая-то доля непонимания. Конечно, при условии, что голова приоткрыта для восприятия запредельного мира. В противном случае сигналы не проходят, и всё выглядит понятным. Но, скажем, «Евгения Онегина» полезно читать и в том, и в другом случае. Причём неясно, какой вариант эффективнее.

Насчёт математики кое-кто думает, что здесь должно быть понятно всё — и это катастрофа! Поскольку так не бывает. Нигде и никогда. Ибо, если понятно всё, индивид слишком мелко плавает и не видит роящихся вопросов. Поэтому низвести преподавание до абсолютно ясного уровня невозможно — утопия.

В предыдущем разделе мы скользнули по квадратным уравнениям, комплексным числам и даже поговорили ни о чём и обо всём сразу по «карте» (3.22). «А какое впечатление окажет сие на пятиклассника?» — думает Министр Образования, — «Всё туманное надо бы вычеркнуть».

Но для любого юнги туманные декорации полезнее банальностей на авансцене. Они возбуждают, провоцируют, подталкивают. Потом это отработается, окупится. Чтение «Анны Карениной» в раннем возрасте запускает механизмы, которые потом наполняют энергией на любом избранном пути.



Глава 4

Функции и системы координат

90% жизни уходит на приготовления.

4.1 Что такое функция

Функция $f(x)$ — это *соответствие*, ставящее элементам x некоторого множества X элементы y некоторого множества Y , что записывают в виде

$$y = f(x).$$



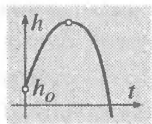
Другими словами, $y = f(x)$ — это *зависимость* y от x . При этом переменные x , y называют, соответственно, *аргументом* и *функцией*. Дабы общность не парализовала наше воображение, начнём с примеров. Большей частью встречаются числовые функции. Скажем, *второй закон Ньютона*,

$$F = m \cdot w,$$

даёт зависимость силы F от ускорения w . Разумеется, если речь идёт о движении фиксированной массы m . В противном случае на F можно смотреть как на функцию двух переменных m и w .

Аналогичным образом можно взглянуть на *закон Ома*, *Бойля—Мариотта* и вообще на различные физические взаимо-

связи. Вот, например, квадратичная функция h от t , фиксирующая зависимость от времени высоты подъёма тела брошенного вверх со скоростью V_0 :



$$h = V_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

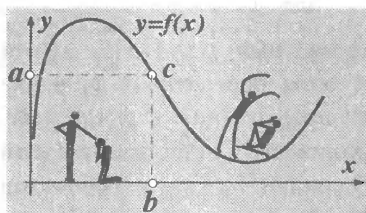


Физика здесь, конечно, сбоку бантик. Содержательная начинка необязательна. Зависимость y от x можно задавать чисто формульно, алгоритмически:

$$y = x^2 - 3, \quad y = \frac{2x + 5}{x^2 - 1}.$$

4.2 Графическое описание функции

Удобный способ описания числовой функции — *графический*. На плоскости берём две взаимно перпендикулярных линии, градуируем их, одну — называем осью иксов, другую — осью игреков. Тогда на плоскости зависимости $y = f(x)$ отвечает множество точек (пар чисел) $\{x, f(x)\}$, называемое *графиком* $f(x)$, рис. (4.1).

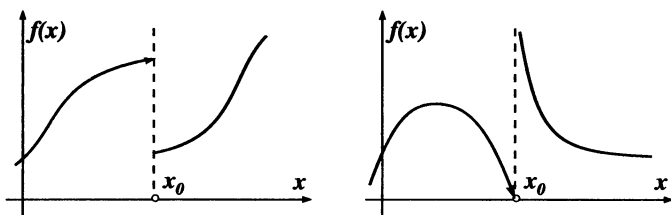


(4.1)

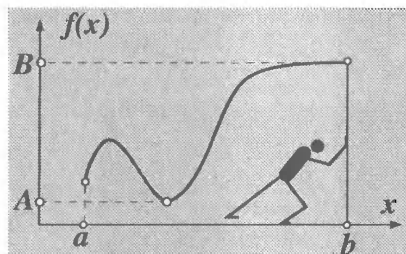
Таким образом, график функции является её геометрическим представлением, чрезвычайно популярным из-за визуальной наглядности. В то же время, наоборот, график может служить *способом задания функции*. Рисуем график (4.1), и тогда игры «вычисляются» с помощью геометрического построения. Из любой точки $x = b$ восстанавливаем перпендикуляр к оси x до пересечения с графиком в точке c , затем из c опускаем перпендикуляр на ось y , получаем значение функции $y = a$.

4.3 Сопутствующие понятия

Имея дело с функциями, желательно уметь их классифицировать и характеризовать. Важный класс образуют *непрерывные функции*, у которых *малым изменениям аргумента отвечают малые изменения функции*. Это не совсем точное определение, но мы тут не будем бежать вперед паровоза, что увело бы нас далеко в сторону¹⁾. Интуитивно функцию считают непрерывной, если её график можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги. Такое «определение» высмеивают в Высшей Школе, но на первых порах оно вполне удовлетворительно. «Берега» обозначают ситуации в которых непрерывность отсутствует, функция терпит разрывы. Вот два примера.



Множество тех x , для которых значения $f(x)$ определены, называется *областью определения функции* f . Для функции (4.2) областью определения служит отрезок $[a, b]$, а областью её значений — отрезок $[A, B]$.

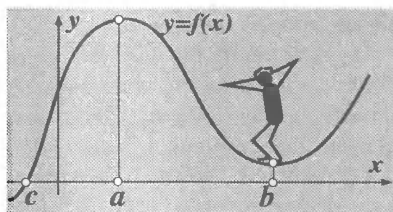


(4.2)

Точки x , в которых $f(x) = 0$, называются *корнями функции*. На рис. (4.3) это точка $x = c$. В точках $x = a$ и $x = b$ на том же

¹⁾ Вопрос аккуратно решается в *теории пределов* в рамках *математического анализа*.

рисунке функция принимает *локально максимальное* и *локально минимальное значение*²⁾. Локальный минимум в точке $x = b$ не является глобальным.

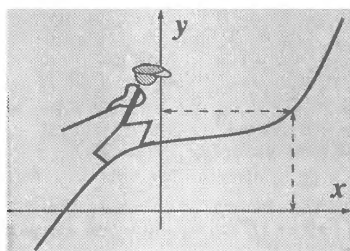


(4.3)

Если f разные точки $u \neq v$ переводит в разные точки $f(u) \neq f(v)$, то функция f *обратима*, *взаимно однозначна*. Обратную функцию обозначают как f^{-1} , но « -1 » здесь не является показателем степени. Если, например, $f(x) = x^3$, то $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, поскольку

$$y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}.$$

Взаимную однозначность функции обеспечивает её *монотонность*. Функция $f(x)$ называется *монотонно возрастающей*, если из $u > v$ следует $f(u) \geq f(v)$, и — *строго возрастающей*, если $f(u) > f(v)$. В случае *монотонного убывания* — $f(u) \leq f(v)$. На рисунке (4.4) изображена *монотонно возрастающая функция*.

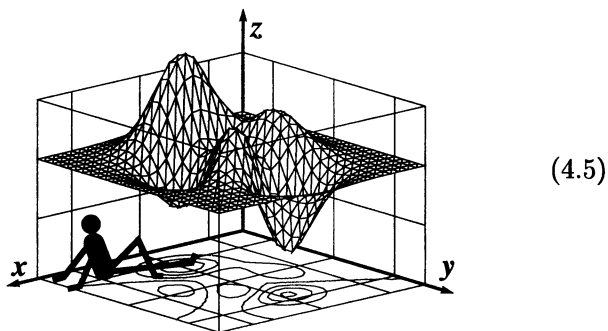


(4.4)

²⁾ Дайте аккуратное определение *локальных максимума и минимума*.

4.4 Функции нескольких переменных

Чаще всего *аргумент* x у $f(x)$ и *значение* функции $y = f(x)$ являются вещественными числами, т. е. f переводит точки прямой \mathbb{R} в точки прямой \mathbb{R} , что записывают как $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Но бывают функции, зависящие от нескольких переменных, например $z = f(x, y)$. График такой функции располагается уже в пространстве и напоминает некую поверхность гор:




Переменных может быть и больше

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (4.6)$$

В таком случае набор переменных

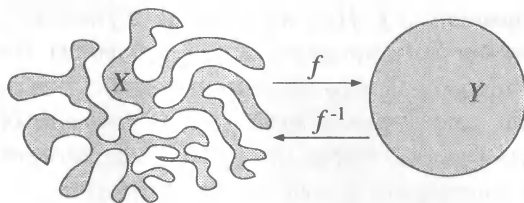
$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

удобно называть *вектором*, и (4.6) записывать в виде

$$y = f(\mathbf{x}).$$


Встречаются также не обязательно числовые функции, переводящие элементы некоторого множества X в элементы множе-

ства Y , что записывают как $f : X \rightarrow Y$

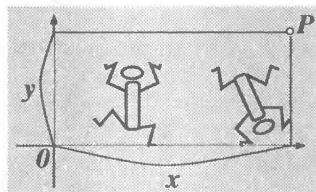


и говорят, что f действует из X в Y . Запись $f : X \rightarrow Y$ — обыкновенный стенографический трюк. Желающие могут обходить-ся словами. В общем случае функции f предпочитают называть *отображениями* или *преобразованиями*.

Всё сказанное про f — очень просто. Совсем просто. И это главное, что надо понять. Но для уяснения «механики» необходимо время. Надо повозиться с примерами. Самостоятельно или с терпеливым учителем.

4.5 Системы координат

По ходу дела с *системой координат* на плоскости мы уже познакомились³⁾, когда фиксировали взаимно перпендикулярные оси иксов и игреков (раздел 4.2), задавая тем самым *систему координат* Oxy . Там это нужно было для удобства описания графиков. Но трюк тот (использования координат) важен сам по себе, ибо является инструментом «измерения» (фиксации) местоположения точек на плоскости или в пространстве. Любая точка P

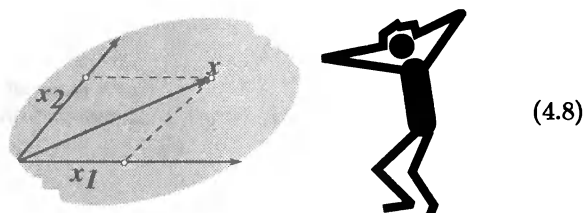


(4.7)

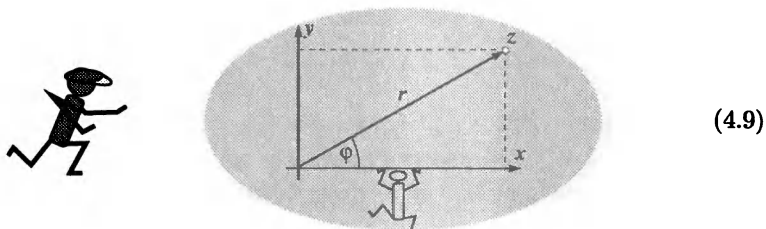
³⁾ Знакомство на ходу, мельком — очень важный этап познания и приобщения, каковые нуждаются в постепенности. Да и нутро человеческое так устроено, что лучше замечает боковым зрением.

на плоскости (4.7) определяется двумя числами, двумя координатами, x и y , которые представляют собой расстояния от начала координат 0 до проекций P на оси x и y . В пространстве систему координат задают три взаимно перпендикулярных оси x , y и z , рис. (4.5). Такие системы координат (со взаимно перпендикулярными осями) называются *декартовыми*, и именно они везде далее используются, если используются.

Но для обозначения «берегов» стоит упомянуть и другие инструменты того же назначения. Иногда используются *косоугольные координаты*, рис. (4.8),



иногда *полярные*, рис. (4.9).



В *полярных координатах* точку z определяют два числа: длина r вектора z и угол φ , образуемый вектором z с осью иксов⁴⁾.

Уловки (4.8) и (4.9) приводятся не для изучения, но они, как и многие другие декоративные элементы, играют определённую роль в освоении того, что находится в фокусе. В противном случае учёба происходит как бы на плато, окружённом пропастью, и связь с Космосом теряется.

⁴⁾ Декартовы координаты x , y точки z выражаются (пятиклассники зажмуриваются) как $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Глава 5

Линейная функция

*Все в тебе мне до боли нравится,
Даже то, что ты не красавица!*

Марина Цветаева

5.1 Что такое линейная функция

Линейной вообще-то принято называть *функцию* $f(x)$, удовлетворяющую требованию

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad (5.1)$$

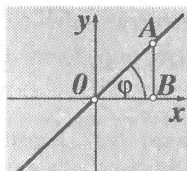
для любых чисел α , β , x , y . Если особо не умничать, то *свойству суперпозиции* (5.1) удовлетворяет лишь $y = kx$. Но в школе *линейной* называют *функцию* $y = kx + c$, и с этим пока едва ли стоит спорить.

К рассмотрению *линейной функции* (ЛФ)

$$y = kx + c, \quad (5.2)$$

целесообразно подойти, начиная с графика

$$y = kx,$$



$$(5.3)$$

убедившись, что это прямая линия. Действительно, для любой точки A на прямой (5.3)

$$\frac{y}{x} = \frac{AB}{OB} = k,$$

т. е. $k = \operatorname{tg} \varphi$. Кто не знает пока, что такое тангенс, $\operatorname{tg} \varphi$, так это отношение длины катета, противолежащего углу φ , к длине прилежащего катета.

Если в $y = kx$ перейти к новым переменным (штрихованным)

$$\begin{aligned} x &= x', \\ y &= y' - c, \end{aligned}$$

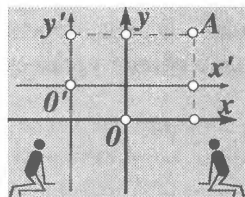
то $y = kx$ перейдёт в $y' = kx' + c$, т. е. в *линейную функцию* (5.2) общего вида. Поэтому графиком ЛФ всегда служит прямая линия. Всё это можно разыграть и в обратном направлении, от ЛФ общего вида к $y = kx$.

5.2 О замене переменных

Отвлечёмся на обдумывание использованной выше *замены переменных* вида

$$\begin{aligned} x &= x' + \alpha, \\ y &= y' + \beta \end{aligned} \quad (5.4)$$

с параллельным смещением осей координат.



Замена переменных (системы координат) — очень продуктивная идея. Важная и широко применимая. В данном простейшем случае с заменой (5.4) целесообразно разобраться самостоятельно. Подвигать оси, поманипулировать знаками α, β . Но главное, оставить форточку открытой для *общей идеи* замены переменных, к которой вот так, малыми шагами и надо двигаться. Мимоходом, поглядывая в корень искоса. Боковое зрение намного эффективнее¹⁾. Именно поэтому настоящее Знание формируется в основном побочными влияниями.

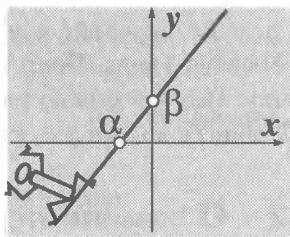
¹⁾ Его сознание не успевает перехватывать, и «данные» проваливаются в подсознание, устраиваясь прямо «под ложечкой».

Всё это очень просто. И в таких условиях накатывающей ясности «писателям» часто хочется разжевать и в рот положить²⁾. В результате игровое поле засоряется деталями, в глазах рябит, и новичкам кажется, что здесь прячется что-то таинственное. Ничего такого тут нет. Возьмите карандаш, бумагу, и проиграйте несколько вариантов. Это освободит вас на всю жизнь от необходимости таскать за собой шпаргалки.

5.3 Прямые на плоскости

Прямая $y = kx + c$ может быть задана, например, точками пересечения с осями координат — кружочки на рисунке справа. Коэффициенты k и c определяет система уравнений

$$c = \beta, \quad k\alpha + c = 0.$$



Сбой происходит, если требуется уравнение вертикальной прямой³⁾. Выход простой. Вместо $y = kx + c$ надо рассматривать более общие уравнения

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0, \tag{5.5}$$

где переменные x и y уравниваются в правах. Задание коэффициентов в (5.5) позволяет описать любую прямую на плоскости.



Взаимосвязь уравнений (5.5) со своими графиками — очень важное соответствие. От формул $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ мы можем переходить к прямым линиям, делать выводы визуально, а потом переводить их обратно в формулы.

²⁾ Тогда как крутые виражи проходят скороговоркой.

³⁾ Горизонтальные прямые получаются заданием $k = 0$.

Алгебру и геометрию привёл во взаимодействие

Рене Декарт (1596–1650),



придумавший *декартовы координаты*, и сдвинувший с мёртвой точки многие науки. Его первоначальной идеей было алгебраическое решение геометрических задач⁴⁾. Но жизнь задействовала разработанный аппарат в обратном направлении, от алгебры к геометрии. Теперь о формулах предпочитают думать геометрически, что подключает к мышлению визуальное сопровождение. Вот как это происходит.

Допустим, нас интересует разрешимость системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \gamma_1 = 0, \\ \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \gamma_2 = 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

Каждому уравнению (5.6) на плоскости (x, y) отвечает прямая линия, решению (5.6) — пересечение прямых. Поэтому, если прямые непараллельны, например,

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} \neq \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} \quad \text{при условии} \quad \alpha_{12}, \alpha_{22} \neq 0, \quad (5.7)$$

то решение обязательно есть. Если параллельны, то вопрос сводится к тому, совпадают они или нет, что опять-таки легко выясняется в терминах коэффициентов. (?) Не подумайте только, что финтифлюшка (5.6) даёт хоть какое-то представление о потенциале геометрического мышления в алгебре. Она даёт лишь намёк.

Упражнение. Неравенство (5.7) исполно из-за ограничивающего требования $\alpha_{12}, \alpha_{22} \neq 0$. Покажите, что для существования и единственности решения системы⁵⁾ (5.7) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} \neq 0, \quad (5.8)$$

без дополнительных оговорок.

⁴⁾ И компьютеры до сих пор благодарны Декарту, иначе им геометрия была бы не по зубам.

⁵⁾ Для непараллельности соответствующих прямых.

Левая часть (5.8) представляет собой так называемый *определитель*, или *детерминант*.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}.$$

5.4 Равномерное прямолинейное движение

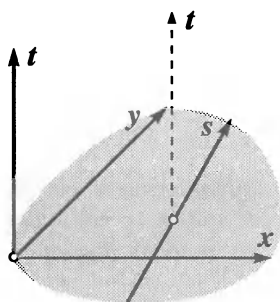
Многое во Вселенной Создатель устроил на основе линейных связей. В частности, зависимость пройденного пути s от времени t точки, движущейся с постоянной скоростью⁶⁾ v ,

$$s = vt + s_0$$



(5.9)

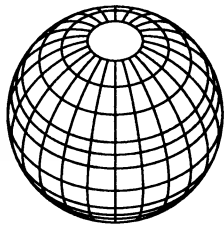
Путь и скорость могут быть векторами.



Если точка движется в плоскости (x, y) , то, нарисовав ось s в направлении движения и приставив перпендикулярно (x, y) ось времени t , имеем движение (5.9) в плоскости (s, t) . Его график прямая линия в плоскости (s, t) , а значит — в пространстве (x, y, t) .

⁶⁾ Либо скорости v от времени t точки, движущейся с постоянным ускорением w , $v = wt + v_0$.

Итак, отвлекаясь от всех этих хлопот, можно сказать: прямолинейное движение с постоянной скоростью в плоскости (x, y) описывается прямой в трёхмерном пространстве (x, y, t) . Пересечению двух таких прямых соответствует встреча движущихся точек. Безделица вроде бы, но в некоторых проявлениях так выстреливает, что *сложное оборачивается простым*. Короче, вот задача.



Задача. Четыре корабля A, B, C, D плывут по морю-океану строго прямолинейно, каждый со своей постоянной скоростью. Никакие два курса не параллельны, никакие три — не пересекаются в одной точке. Известно, что A, B, C попарно встречались между собой, а D встречался с A и B . Доказать, что D встретится с C .

Тому, кто не знает графиков прямолинейного движения — размышлений на три дня. Мы же с вами решаем задачу в одно касание.

Итак, оси x, y располагаем на поверхности океана, ось t — перпендикулярно вверх. В пространстве (x, y, t) графиками движения кораблей будут четыре прямых линии, которые обозначим теми же буквами A, B, C, D . Поскольку корабли A, B, C попарно встречаются, прямые A, B, C попарно пересекаются, и потому лежат в некоторой плоскости P . Прямая D , по условию, пересекается с прямыми A и B — поэтому двумя точками лежит в P , а значит и вся лежит в P . Следовательно, пересекает прямую (график) C . Всё!

5.5 Плоскости в пространстве

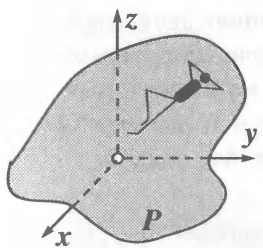
Отталкиваясь от уравнений (5.5),

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

описывающих прямые на плоскости, естественно подняться на следующий виток спирали, где уравнения вида

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0, \quad (5.10)$$

описывают плоскости в \mathbb{R}^3 с системой координат $Oxyz$. На рисунке (5.11) изображён фрагмент соответствующей плоскости P .



(5.11)

Глава 6

Квадратный многочлен

*A not getting what you want
is sometimes a stroke of luck.*

Dalai Lamas

6.1 Квадратные уравнения

Довольно часто приходится решать *квадратные уравнения* типа

$$x^2 - 6x + 5 = 0, \quad (6.1)$$

т.е. искать значения x , при которых (6.1) действительно обращается в ноль.

Выделим в левой части (6.1) полный квадрат

$$\begin{array}{c} \underbrace{x^2 - 6x + 9}_{x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2} - \underbrace{9 + 5}_{4} \\ \boxed{(x - 3)^2 - 2^2} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{K} \\ \text{O} \end{array} \quad (6.2)$$

Далее $(x - 3)^2 - 2^2$ раскладываем в произведение множителей по формуле разности квадратов¹⁾,

$$[(x - 3) + 2][(x - 3) - 2],$$

¹⁾ $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v).$

и сводим таким образом уравнение (6.1) к виду



$$(x - 1)(x - 5) = 0, \quad (6.3)$$

откуда сразу определяются *корни*

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 5.$$

Особо обратим внимание, что (6.3) есть



$$(x - x_1)(x - x_2) = 0. \quad (6.4)$$

И если бы в (6.1) коэффициенты были другие,

$$x^2 + px + q = 0,$$

мы бы всё равно тем же путём пришли к разложению

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2). \quad (6.5)$$

6.2 Теорема Виета

Раскрывая справа в (6.5) скобки и приводя подобные, имеем

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2,$$

т. е.

$$x^2 + px + q \equiv x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2, \quad (6.6)$$

откуда, приравнивая коэффициенты при x и свободные члены, получаем *теорему Виета*²⁾

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1x_2 = q. \quad (6.7)$$



Из (6.7) ясно, например, что решать систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 4, \end{cases} \quad (6.8)$$

²⁾ *Упражнение.* Почему всё-таки из (6.6) следует (6.7)?

можно сразу, выписывая квадратное уравнение

$$t^2 - 3t + 4 = 0$$

и вычисляя корни по известным формулам. А на вопрос, есть ли у (6.8) решения, — без промедления вычислять *дискриминант*³⁾ $D = 3^2 - 4 \cdot 4 < 0$ и отвечать: «нет»⁴⁾.

6.3 Вернёмся к нашим баранам

Что могло бы помешать проделанному выше трюку, если бы в (6.1) коэффициенты были другие? — Разве что «неприятность» типа $x^2 - 6x + 10 = 0$. Тогда, действуя аналогично, мы получили бы в итоге

$$(x - 3)^2 + 1 = 0,$$

чего при действительных x быть не может. Поэтому не знающие пока *комплексных чисел* упрутся в непреодолимый барьер. «Знающие» двигаются тем же курсом, потому что для них сумма квадратов и разность квадратов — одно и то же,

$$a^2 + b^2 = a^2 - (ib)^2 = (a + ib)(a - ib).$$

Но фокусы с мнимой единицей i — отдельная тема, см. главу 15.

Итак, исполненный выше трюк показывает, что найти корни квадратного уравнения непосредственно — так же легко, как вычисляя их по известным формулам. Да и формулы мгновенно восстанавливаются. Пусть $x^2 + px + q = 0$. Проторённым путём:

$$y = x^2 + px + q = \left(x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2} \right)^2 \right) - \left(\frac{p}{2} \right)^2 + q,$$

$$y = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4},$$

где

$$D = p^2 - 4q \tag{6.9}$$

³⁾ См. далее.

⁴⁾ Нет *действительных* решений. Есть *комплексные*, глава 15.

называют *дискриминантом*. Знак D определяет ситуацию: $D \geq 0$ — корни x_1, x_2 действительны; $D < 0$ — x_1, x_2 комплексные. В случае $D = 0$ корни равны, $x_1 = x_2$. Ну и для памяти:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad (6.10)$$

Заодно оговоримся насчёт уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (6.11)$$

которое сводится к $x^2 + px + q = 0$ делением (6.11) на a . Корни (6.11):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (6.12)$$

Формулы (6.10), (6.12), или одну из них, обычно запоминают. Но это не должно выключать память о самой идее их получения.



6.4 Ряд Фибоначчи

Источником квадратных уравнений бывают задачи достаточно «высокого полёта».

Например, *ряд Фибоначчи*,



1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... ,

устроен по правилу

$$\Phi_{n+2} = \Phi_{n+1} + \Phi_n, \quad (6.13)$$

т. е. каждое последующее число равно сумме двух предыдущих.

Подберём геометрическую прогрессию, удовлетворяющую (6.13) Подстановка $\Phi_n = x^n$ в (6.13) даёт $x^{n+2} - x^{n+1} - x^n = 0$, что после сокращения на x^n приводит к квадратному уравнению

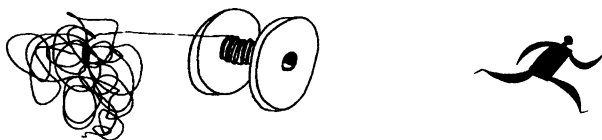
$$x^2 - x - 1 = 0, \quad (6.14)$$

корни которого $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Поэтому закону (6.13) удовлетворяют геометрические прогрессии $\Phi_n = x_1^n$ и $\Phi_n = x_2^n$, а также их линейная комбинация

$$\Phi_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n$$

при любых α и β . Выбирая α и β из условия $\Phi_1 = \Phi_2 = 1$, получаем в итоге для (6.13) *формулу Бинэ*

$$\Phi_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

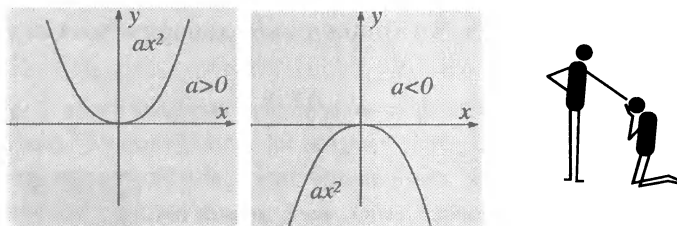


6.5 Квадратичная функция

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ естественно обращает внимание на *квадратный многочлен*

$$y = ax^2 + bx + c. \quad (6.15)$$

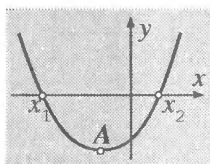
Начинать изучение функции (6.15) разумно с простейшей ситуации $y = ax^2$, в которой графиком оказывается *парабола*:



Из набившего оскомину преобразования:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) - a \cdot \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + c = \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right], \quad (6.16)
 \end{aligned}$$

откуда накатанным образом возникают корни⁵⁾



$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (6.17)$$

и становится понятным разложение

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Из (6.16) видно, что при $x = -\frac{b}{2a}$ функция (6.15) принимает *минимальное* (при $a > 0$) или *максимальное* (при $a < 0$) значение, равное $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, где $\boxed{D = b^2 - 4ac}$ — *дискриминант* уравнения (6.12).

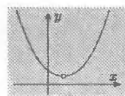
Поэтому в переменных

$$x' = x + \frac{b}{2a}, \quad y' = y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

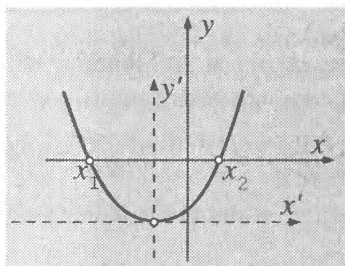
квадратичная функция (6.15) принимает канонический вид

$$y' = a(x')^2. \quad (6.18)$$

⁵⁾ При $a > 0$, $D < 0$ парабола выше оси x , корней нет.

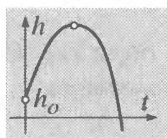


Понятно, проделанный путь можно пройти в обратном направлении, от (6.18) к (6.15). И тогда вид графика (6.15) причинно проясняется, поскольку его можно получить из графика (6.18) переносом начала координат в минимум, рисунок справа.



6.6 Брошенное вверх тело

В качестве упражнения имеет смысл повозиться с квадратным многочленом, возникающим при описании движения тела брошенного вертикально со скоростью v_0 ,



$$h = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + h_0.$$

Если тело брошено вверх, и ось h направлена вверх, то

$$h = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + h_0,$$



а h_0 зависит, разумеется, от выбранного нулевого уровня h и от точки нахождения тела в момент $t = 0$ (откуда брошено).

Здесь возникает серия вопросов. В какой момент тело окажется на высоте h_1 ? Для этого необходимо решить квадратное уравнение

$$-\frac{gt^2}{2} + v_0 t + h_0 = h_1.$$

На какую максимальную высоту тело поднимется и при каком t это произойдёт? Мотивация таких вопросов существенно возрастает при рассмотрении движения тела, брошенного под углом к горизонту (стрельба из пушки).

6.7 Неравенство Коши—Буняковского

Что касается возможностей использования дискриминанта, интересно обратить внимание на следующий пример. Неравенство

$$(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) \quad (6.19)$$

изящно и просто доказывается так. Очевидно,

$$(x_1 - \lambda y_1)^2 + \dots + (x_n - \lambda y_n)^2 \geq 0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных, имеем квадратный многочлен относительно λ ,

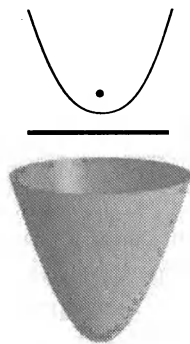
$$\lambda^2 (y_1^2 + \dots + y_n^2) - 2\lambda (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) + (x_1^2 + \dots + x_n^2) \geq 0,$$

положительный при любом λ . Когда это возможно? Только при неположительности дискриминанта — а это и есть (6.19).

Выстреливает «школьный» факт, тогда как (6.19) — это один из краеугольных камней *n*-мерной геометрии.

6.8 Чем знаменита парабола

Парабола знаменита не тем, что служит графиком квадратичной функции. Причины её триумфального существования под солнцем более весомы.



Пучок лучей, параллельных оси симметрии параболы, отражаясь в параболе, собирается в её фокусе. И наоборот, свет от источника, находящегося в фокусе, отражается параболой в пучок параллельных оси лучей. Мысли о прожекторах, фарах, узконаправленных антеннах появляются автоматически. Формально, парабола определяется как геометрическое место точек, равноудалённых от фокуса (точки) и директрисы (прямой). Это на плоскости. Параболоид вращения в пространстве образуется вращением параболы вокруг оси симметрии.

Как видите, вся теория здесь, включая *корни, графики, теорему Виета, положение минимума и сам минимум*, укладывается в 15–20 минут. Что касается задач, то на территории квадратного многочлена игра всегда идёт на двух-трёх аккордах. А разнообразие достигается искусством комбинирования и эквилибристикой. Если думаете, что это бесполезно, вспомните: жонглирование мечом помогает использовать меч в бою.

6.9 Деление многочленов и теорема Безу

Опирируя многочленами, приходится иметь дело со стандартными приемами — делением многочленов «в столбик», например,



$$\begin{array}{r}
 x^3 + 2x^2 - x + 3 \quad |x - 1 \\
 \underline{x^3 - x^2} \quad x^2 + 3x + 2 \\
 3x^2 - x \\
 \underline{3x^2 - 3x} \\
 2x + 3 \\
 \underline{2x - 2} \\
 5
 \end{array} \quad (6.20)$$

Произведённое деление даёт тождество

$$x^3 + 2x^2 - x + 3 = (x - 1)(x^2 + 3x + 2) + 5.$$

Легко видеть, что в общем случае деление многочлена

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \quad (6.21)$$

на $(x - c)$ даст в частном некоторый многочлен $Q_{n-1}(x)$ и некоторое число R в остатке, т. е.

$$\begin{array}{r}
 P_n(x) \quad |x - c \\
 \dots \quad Q_{n-1}(x) \\
 R,
 \end{array} \quad (6.22)$$

что равносильно тождеству

$$P_n(x) = (x - c)Q_{n-1}(x) + R, \quad (6.23)$$

полагая в котором $x = c$, получаем следующий результат.

1. Теорема Безу. Остаток R при делении $P_n(x)$ на $(x - c)$ равен $P_n(c)$, т. е.

$$R = P_n(c)$$



Поэтому, если \boxed{c} корень уравнения $P_n(x) = 0$, то $R = 0$, т. е. $P_n(x)$ на $x - c$ делится без остатка. В конечном итоге это соображение приводит к разложению

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n), \quad (6.24)$$

где x_1, \dots, x_n — корни многочлена $P_n(x)$, которые по *основной теореме алгебры*⁶⁾ всегда существуют — по крайней мере, в комплексной плоскости.

Вернёмся к примеру (6.20). Подставив $x = 1$ в $x^3 + 2x^2 - x + 3$, получаем $1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 + 3 = 5$, что согласуется с *теоремой Безу*.

А каков будет остаток от деления $P_n(x)$ на $ax - b$? Нередко такой вопрос ставит в тупик. Потому что в любой теме надо чуть-чуть смотреть по сторонам. Остатки от деления $P_n(x)$ хоть на $ax - b = a \left(x - \frac{b}{a} \right)$, хоть на $\left(x - \frac{b}{a} \right)$ одинаковы: $R = P_n \left(\frac{b}{a} \right)$, различны *частные*. (?)

6.10 Полезные следствия

1. Понятно, что деление в столбик многочлена

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (6.25)$$

с целыми коэффициентами на $(x - c)$ при целом c даёт в частном многочлен $Q_{n-1}(x)$ с целыми коэффициентами и целый остаток. А если остаток равен нулю, то

$$R = a_0 - kc = 0$$

⁶⁾ См. главу 15.

при некотором целом k , положительном или отрицательном. Отсюда вытекает, что *любой целый корень многочлена (6.25) с целыми коэффициентами является делителем свободного члена a_0 со знаком плюс или минус.*

2. Все рациональные корни $x = \frac{p}{q}$ многочлена (6.25) с целыми коэффициентами при условии $a_n = 1$ являются целыми.

Подставив $x = \frac{p}{q}$ в (6.25) и умножив на q^n , получим, с учётом $a_n = 1$,

$$q^n P_n(x) = p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n, \quad (6.26)$$

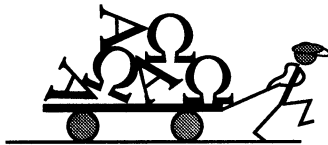
что, если рассматривать как многочлен от q , не может обращаться в нуль, поскольку p и q взаимно просты (см. предыдущий пункт), а значит «корень» q не может быть делителем свободного члена p^n .

Если же $a_n \neq 1$, то

$$q^n P_n(x) = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n, \quad (6.27)$$

может обращаться в нуль лишь в том случае, когда q является делителем a_n .

3. Если c — целый корень многочлена (6.21) с целыми коэффициентами, то для любого целого m число $P(m)$ делится на $c - m$.



Глава 7

Показательная функция

*Инстинкт не даёт ходу
скороспелым умозаключениям.
Иначе голова окажется полна идеями,
которые цитрамоном не лечатся.*

7.1 Экспонента

Считая в ситуации $c = a^b$ одно число фиксированным, другое аргументом, третьё функцией, мы получаем несколько вариантов зависимостей:

$$\begin{array}{ll} y = x^b & \text{степенная функция,} \\ y = a^x & \text{показательная функция}^1), \\ x = a^y & \text{логарифмическая функция : } y = \log_a x. \end{array}$$

Далее речь идёт о *показательной функции*, которая проходит через всю математику, а значит и через всё житейское море.

Функция $y = k \cdot a^x$ также считается *показательной* (*exponential*), а рост $k \cdot a^x$ *экспоненциальным*. В случае целочисленного аргумента, $x = n$, последовательность $k \cdot a^n$ называется *геометрической прогрессией*. Содержательно аргументом показательной функции часто бывает время, $x = t$. В случае $x = n$ можно также говорить о времени, *дискретном*.

Экспоненциальные процессы очень широко распространены в природе. Основная причина заключена в том, что скорость роста многих

величин пропорциональна самим этим величинам. Численность популяции, например, от поколения к поколению меняется по закону²⁾

$$x(n) = q \cdot x(n-1). \quad (7.1)$$

Решением (7.1) является *экспоненциальная функция* $x(n) = x(0)q^n$, представляющая собой *геометрическую прогрессию* со знаменателем q .

7.2 Свойства показательной функции

Для рациональных $x = \frac{p}{q}$ значение a^x определяется как



$$a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p. \quad (7.2)$$

Основание a показательной функции a^x обычно предполагается положительным, $a > 0$. Иногда добавляют $a = 0$, но тогда значение 0^x при $x \leq 0$ не определено. Отрицательные $a < 0$ исключаются³⁾. Усвоить необходимо *до автоматизма*:

$$a^0 = 1, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$

$$a^{u+v} = a^u a^v; \quad (a^u)^v = a^{uv}; \quad (ab)^x = a^x b^x.$$

Очень важное свойство:

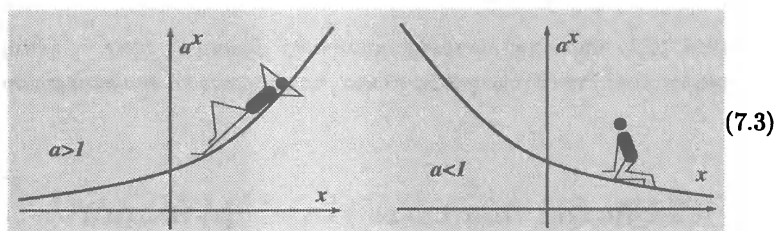
Из (7.2) следует $a^x > 1$, если $a > 1$ и $x > 0$. Поэтому

$$a^x - a^z = a^z (a^{x-z} - 1) > 0, \quad \text{если } x > z,$$

²⁾ До тех пор, пока не проявляются эффекты насыщения, связанные с нехваткой пищи, пространства; загрязнением среды, эпидемиями.

³⁾ Несмотря на то что при целых x значения a^x всегда определены, исключая 0^x при $x \leq 0$.

откуда следует, что a^x *монотонно возрастает* по x . А это позволяет понять, что графики показательной функции $y = a^x$ выглядят так:



Дело в том, что благодаря монотонности отдельные вычисленные точки $y = a^x$ можно более-менее плавно (монотонно) соединить кривой, дающей верное качественное представление о зависимости $y = a^x$.

Знакомиться с показательной функцией очень важно не по Википедии⁴⁾. Основная трудность **овладения** любым Знанием не в грубой информации, а в ощущении единства. В понимании взаимосвязи частей, их работоспособности, происхождения. Почему всё оформилось так, а не иначе? Начинаешь вдумываться и понимаешь, что по-другому было бы неудобно, противоречиво. Короче, перечисленные выше свойства необходимо продумать в рамках естественного сценария. Сначала взаимоувязка свойств для целых показателей степени. Затем определение корней целой степени, и уже затем повторение сценария для дробных показателей, каковой сводится к повторению прежней схемы для целых p над числами $\sqrt[p]{a}$ — см. видео (oschool.ru). Всё это должно приводить к ощущению владения предметом, а не знакомства.

Принципиальный здесь момент — введение корней $\sqrt[p]{a}$, для вычисления каковых имеются эффективные методы, см. (3.14), (3.15).

⁴⁾ Википедия — замечательный интернет-ресурс, но он создан для других целей. Не для обучения, хотя в некоторой степени может способствовать этому процессу. Но чаще вредит, особенно на первом этапе, создавая иллюзию, что всё известно.

7.3 Экспоненциальный рост

Функция a^x растёт очень быстро, как говорят — *экспоненциально*. *Экспоненциальный рост* необходимо включить в арсенал *ангела интуиции*, который мало что понимает, но быстро и точно реагирует. Мало понимает, потому что воспитан в основном на *пропорциональном*, $y = kx$, и *обратно пропорциональном* росте, $y = \frac{k}{x}$. Увеличение площади посева вдвое увеличивает урожай также вдвое. А если в три раза быстрее соображать, то на решение задач уходит в три раза меньше времени.

Показательная функция фантастически быстро растёт. Атомов воздуха в банке порядка числа Авогадро, $\sim 10^{23}$, а в атмосфере Земли всего лишь $\sim 10^{40}$, аргумент 10^n подрос не более чем вдвое. А ещё «немного» — и получается число всех атомов Солнца, $\sim 10^{58}$. А ещё «чуть-чуть» — и получается число элементарных частиц во Вселенной, $\sim 10^{100}$. То есть залп из 10^n покрывает всю Поднебесную всего лишь при $n = 100$.

При экспоненциальном росте изменение параметров носит «взрывной характер», представляя опасность. За день-другой до катастрофы нет поводов для беспокойства. Загрязнение среды не настояживает, но «вдруг» показатели неблагополучия резко возрастают, и всё летит в тартарары. Но уже нет времени на принятие мер.



• **Эпидемия/пандемия.** Если число больных неким смертельным заболеванием за сутки увеличивается вдвое, то через месяц, $2^{30} \simeq 10^9$, их будет миллиард! А ещё через три дня — всё население Земли. Причём за неделю до «конца света» больных (или уже умерших) всего-то не более одного процента.

• **Сложные проценты.** Допустим, мы нашли банк, начисляющий на вклад 10% ежедневно⁵⁾. То есть из каждого рубля назавтра получается рубль и 10 копеек, а через два дня — $1,1^2 = 1,21$, т. е. во второй день рубль увеличивается на 11 копеек. Невелика добавка, кажется. Однако через год из **одного** рубля получается

$$1,1^{365} = 1\,283\,305\,580\,313\,352 \text{ рублей}, \quad (7.4)$$

⁵⁾ Конечно, мы тут губы маленько раскатали, но кто запретит надувать паруса фантазий.

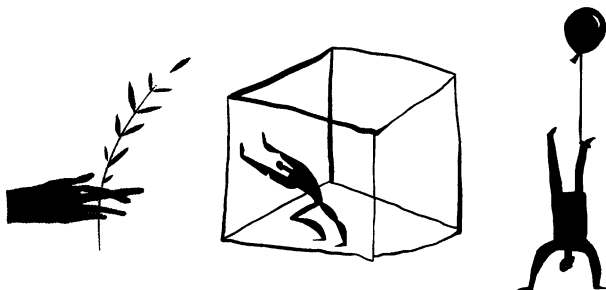
т. е. больше *квадриллиона* (10^{15}). При таких деньгах можно задуматься о покупке Соединённых Штатов Америки целиком.

• **Экология, ресурсы.** Эксперты довольно энергично пугают человечество катастрофическими перспективами в отношении экологии и обеспеченности ресурсами. Загрязнение (в том числе тепловое) окружающей среды увеличивается, а запасы питьевой воды, чистого воздуха, нефти, угля, руды — тают. И в этом росте/убывании первую скрипку играют экспоненциальные тенденции. Тенденции, а не экспоненциальные процессы в чистом виде, потому что когда становится худо (тесно, грязно, голодно, больно), в действие вступают другие факторы. Кто-то бьёт в колокола, кто-то спохватывается, одни накладывают штрафы, другие их платят, третьи строят очистительные сооружения и т. п. В результате рост/убывание замедляется.

Задумаемся, о чём мы с вами говорим с точки зрения математики? — Ни о чём. Вроде бы. О показательной функции более-менее всё сказано. Но всякий математический феномен проявляется далеко за пределами. Также как невидимый глазом стрептококк заставляет бить в колокола — лечить, хоронить, строить. И глядя в микроскоп на этого микро-головастика, приходится думать о последствиях космического масштаба, по крайней мере о больницах и эпидемиях. Точно также круги по воде от математических моделей уходят за горизонт, и там приходится наблюдать за симптомами подспудных течений. Узнавать «течения», упреждать.



Другими словами, изучая математику, необходимо **осваивать** её нематематическую часть. Особенно в тех случаях, когда абстрактные модели имеют прямой выход в реальность и отражают новые феномены, незнакомые или малознакомые. А такое освоение возможно только на уровне подсознания, а не ума. Так что примеры типа рассмотренных надо прокручивать в голове не один раз, варьируя и наслаждаясь. Фантазируя до тех пор, пока вдруг не начнёте ощущать, что экспоненциальный рост вы уже «чувствуете», и узнаете его «по походке», и знаете, чем всё кончится.



Конечно, если учиться только для галочки, можно обойтись без этих хлопот. Но тогда и без результатов. Примерно как с иностранным языком. Слова знаю, предложения строю — говорить не умею. Математику тоже можно знать на таком уровне. Процентами владею, логарифмы знаю — на работу нигде не берут.

7.4 Геометрическая прогрессия

Мы уже отмечали, что показательную функцию с целочисленным аргументом $k \cdot q^n$ называют *геометрической прогрессией*. Факт её широкого распространения в природе проистекает из типичного стандарта роста



$$x(n) = q \cdot x(n-1). \quad (7.5)$$

Так растёт численность биологических популяций, число разделившихся ядер при атомном взрыве, уровни загрязнения и т. п.

Если решение (7.5) искать в виде $x(n) = \zeta^n$, то подстановка в (7.5) даёт

$$\zeta^n = q\zeta^{n-1} \Rightarrow \zeta = q.$$

А так как $x(n)$ не перестаёт быть решением (7.5) при умножении на константу, то общим решением является $x(n) = x(0)q^n$, что позволяет начинать процесс из любого положения $x(0)$.

О суммировании геометрических прогрессий см. раздел 11.2.

7.5 Рекуррентные соотношения

Обобщением (7.5) является *рекуррентное соотношение*⁶⁾



$$s_{n+2} = p_1 s_{n+1} + p_2 s_n. \quad (7.6)$$

Геометрическая прогрессия и тут спасает. Решение опять ищется в виде $s_n = x^n$. Подстановка в (7.6) даёт уравнение

$$x^{n+2} = p_1 x^{n+1} + p_2 x^n,$$

которое после деления на x^n переходит в квадратное,

$$x^2 - p_1 x - p_2 = 0. \quad (7.7)$$

Если x_1, x_2 — неравные друг другу корни (7.7), то закону (7.6) удовлетворяют обе геометрические прогрессии $s_n = x_1^n$ и $s_n = x_2^n$, а также их линейная комбинация

$$s_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n \quad (7.8)$$

при любых α и β . Выбор α и β позволяет удовлетворить любым начальным условиям: $s_0 = s(0)$, $s_1 = s(1)$.

В случае $x_1 = x_2$ общее решение (7.8) переходит в $s_n = \gamma x_1^n$, и одной константы γ не хватает, чтобы обеспечить возможность старта из любого положения $s_0 = s(0)$, $s_1 = s(1)$. Но если $x_1 = x_2$, то помимо $s_n = x_1^n$ возникает другое линейно независимое решение $s_n = n \cdot x_1^n$ (**проверьте!**), и тогда общее решение переходит в

$$s_n = \alpha x_1^n + \beta n \cdot x_1^n, \quad (7.9)$$

снова обеспечивая свободу маневра для удовлетворения любым начальным условиям.

И последнее. Встречаются рекуррентные процессы вида

$$s_{n+2} = p_1 s_{n+1} + p_2 s_n + \theta. \quad (7.10)$$



Замена $s_n = u_n - \theta$ переводит (7.10) в процесс (7.6) для u_n .

⁶⁾ Пару раз мы уже использовали такой трюк, см.

Глава 8

Логарифмы

Сложное — и дурак придумает.
Михаил Кошкин¹⁾

8.1 Логарифмическая функция

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ обратна к показательной,

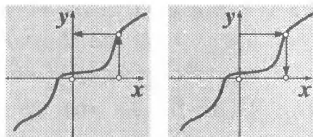
$$x = a^y \quad \Leftrightarrow \quad y = \log_a x \quad (8.1)$$

Традиционно для обозначения аргумента используется буква x , функции — y . Поэтому мы пишем $x = a^y$, чем функцию

$y = f(x) = \log_a x$

задаём *неявно*. Таким образом, $y = \log_a x$ — это решение уравнения $x = a^y$ относительно y .

Функция и её обращение. Для настройки в резонанс здесь уместно кое-что напомнить. Функция $f(x)$ — это *зависимость* между величинами x и $y = f(x)$, причём сначала указывается x , затем «вычисляется» y . Если функция задаётся либо сопровождается графиком, то её «вычисление» y сводится к построению, показанному на рис. (8.2) слева



(8.2)

¹⁾ Главный конструктор легендарного танка Т-34

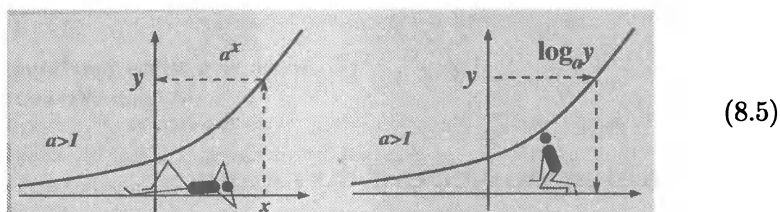
А определение величины x по значению y — изображено справа. Такая зависимость называется обратной функцией и обозначается как f^{-1} , т. е. $x = f^{-1}(y)$, но « -1 » здесь — не показатель степени²⁾. Из (8.2) очевидно, что

$$f(f^{-1}(z)) = z, \quad f^{-1}(f(u)) = u, \quad (8.3)$$

что удобнее записывать без скобок,

$$ff^{-1}z = z, \quad f^{-1}fu = u. \quad (8.4)$$

Для экспоненты с логарифмом аналог (8.2) выглядит так



Тождества (8.4) в данном случае переходят в

$$a^{\log_a z} = z, \quad \log_a a^u = u. \quad (8.6)$$

Первое из тождеств (8.6),

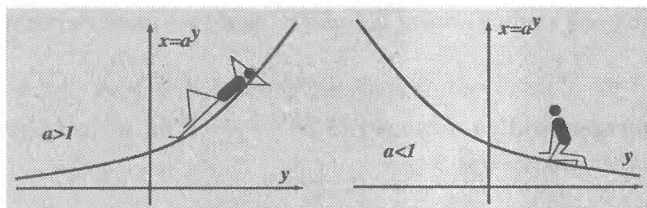
$$\boxed{a^{\log_a x} = x}, \quad (8.7)$$

называют *основным тождеством для логарифмов*.

Поскольку a^x и $\log_a x$ — взаимно обратные функции, возникает впечатление о полном равноправии. Но логарифм, конечно, воспринимается труднее. Как зубную пасту, легче выдавить из тюбика — так и здесь, проще иметь дело с a^x . Ситуация ещё усугубляется тем, что вместо $x = \log_a y$ обычно приходится писать $y = \log_a x$, меняя буквы местами, ибо этикет требует x — для аргумента, y — для функции. Если бы не это, то даже график

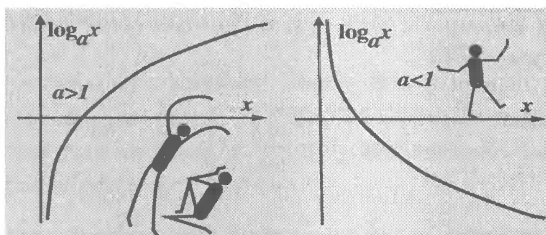
²⁾ Разумеется, буквы для обозначения аргумента и функции можно выбирать любые.

логарифма не надо было бы рисовать заново. Он уже изображен на рисунке (8.8).



(8.8)

Правда, в обозначениях $x = \log_a y$ и с нестандартным расположением осей. Если же буквы x, y поменять местами, и оси привести в обычное положение (поворот на 90° плюс отражение относительно вертикальной оси), то график логарифма будет выглядеть так:



8.2 Свойства логарифмов

Таким образом, график логарифма и график показательной функции — это одна и та же кривая (с точностью до поворота и отражения). То же самое можно сказать и о свойствах этих функций. Свойства *логарифма* — это свойства *показательной функции*, выраженные на другом языке. Например, «логарифм произведения равен сумме логарифмов»,

$$\boxed{\log_a bc = \log_a b + \log_a c},$$

есть не что иное как $a^\beta a^\gamma = a^{\beta+\gamma}$, а

$$\boxed{\log_a b^c = c \log_a b}$$

— эквивалент $(a^\beta)^\gamma = a^{\beta\gamma}$.

Поскольку зубную пасту вернуть в тюбик не так просто, эти элементарные правила, без привычки, даются не сразу. Имеет смысл посмотреть видеолекцию (oschool.ru). Видеоформат позволяет к текстовой информации добавить недостающие ингредиенты.

Далее. Логарифмируя тождество $a^{\log_a b} = b$ по некоторому основанию $c \neq a$, получаем

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b,$$

откуда

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}, \quad \text{👌} \quad (8.9)$$

что называют *формулой перехода к другому основанию*. Полагая в (8.9) $c = b$, имеем³⁾

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}.$$

Наиболее широко распространены *десятичные логарифмы* и *натуральные* (по основанию $e \simeq 2,7$), для которых используются специфические обозначения:



$$\boxed{\log_{10} x = \lg x, \quad \log_e x = \ln x}.$$

8.3 Где нужны логарифмы

• Везде, где присутствует (*экспонента*). Если переменная x меняется во времени по закону

$$x(t) = a^t, \quad (8.10)$$

³⁾ С учётом $\log_b b = 1$.

то в этом контексте естественно спросить: а когда (при каком t) $x(t)$ достигнет уровня⁴⁾ x_0 ? — Для ответа на вопрос надо решить уравнение

$$x_0 = a^t, \quad (8.11)$$

а все такие уравнения решены раз и навсегда:

$$t = \log_a x_0.$$



• Совсем недавно — когда компьютеры ещё не помещались в карман — логарифмы, сводящие трудоёмкое умножение к лёгкому сложению, были мощным орудием вычислений, и их за это возносили до небес. Издавались таблицы логарифмов, выпускались логарифмические линейки, хранящиеся теперь вместе со счётами на музейных полках.

• Логарифмы, оказывается, заложены в каждого из нас на физиологическом уровне. По *закону Вебера—Фехнера* сила ощущения f пропорциональна логарифму интенсивности раздражителя⁵⁾ s . Точнее говоря:



$$f - f_0 = k \lg \frac{s}{s_0}, \quad (8.12)$$

где s_0 — пороговое значение интенсивности раздражителя, а $f_0 = k \lg s_0$ — пороговое значение силы ощущения.


Понятие ощущения представляется, конечно, несколько размытым. Соответственно, точная формула (8.12) кажется тенденциозной. Но она верна, что убедительно подтверждается инвариантностью мелодий. Музыкальная мелодия остаётся сама собой, будучи сыгранной быстрее или медленнее, выше или ниже по звукоряду. Что же при этом неизменно? В соответствии с (8.12)

⁴⁾ Через какое время, например, параметры окружающей среды достигнут критических значений.

⁵⁾ Будь то свет, звук, вкус, запах, вес.

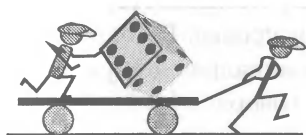
неизменным должно быть отношение частот и длительностей соседних нот. Музыкальная теория это подтверждает.

• Во многих областях широко используется безразмерная величина *децибел*, применяемая для измерения отношения физических величин. Значение S_{dB} в децибелах от величины S определяется как



$$S_{dB} = 10 \lg \frac{S}{S_0}, \quad (8.13)$$

где S_0 — опорное значение величины. Взаимосвязь (8.13) с (8.12) очевидна. На слуху *децибел*, а не *бел*, потому что человек различает громкость, яркость, тяжесть и прочее, когда интенсивность источников отличается на 1 dB. Иными словами, децибел является разностным порогом слышимости, видимости, тактильных ощущений и т. п.



Глава 9

Комбинаторика

*Keep your eyes on the stars,
and your feet on the ground.*

Theodore Roosevelt

9.1 Экспоненциальные кошмары

Вся Вселенная сделана из сотни химических элементов. А с помощью короткого алфавита написаны Библия, и Уголовный кодекс. Такова сила комбинаторики, плодоносящая разнообразием. Где-то это создаёт трудности, где-то — возможности.



Насчёт «кошмаров», разумеется, кому как. Что немцу смерть, русскому — витамин. Такая же история с обилием комбинационных вариантов. Речь идет о хорошо известном явлении. Небольшое число предметов n переставить между собой можно $n!$ (эн факториал) способами, где $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$, см. далее.

При $n = 100$ вариантов перестановок больше, чем атомов в Галактике, $100! > 10^{100}$. Такие «экспоненциальные взрывы»¹⁾

¹⁾ Прилагательное «экспоненциальный» в переборных задачах возникает в связи с формулой Стирлинга $n! \sim \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, переводящей факториальные зависимости в экспоненциальные.

в значительной мере определяют облик Мироздания. Соответственно, перспектива рассмотрения упомянутого числа вариантов настраивает на философский лад.

9.2 Размещения, перестановки, сочетания

1. Размещения. Число различных вариантов выбора (с учётом порядка) m предметов из n предметов a_1, a_2, \dots, a_n равно



$$A_n^m = n(n-1) \dots (n-m+1)$$

Действительно, есть n способов выбрать один предмет, т. е. $A_n^1 = n$. На каждый выбор первого предмета существует $n-1$ способов выбора второго (из оставшихся $n-1$ предметов) — поэтому $A_n^2 = n(n-1)$. И так далее.

2. Перестановки. Число всевозможных перестановок n предметов a_1, a_2, \dots, a_n равно «эн факториал»



$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

По соображениям удобства принимается $0! = 1$.

Очевидно, перестановка получается при размещении всех предметов, что и даёт $A_n^n = n!$

3. Сочетания. Если m предметов из a_1, a_2, \dots, a_n выбираются без учёта порядка (складываются в мешок), то число различных вариантов (число сочетаний из n по m) равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$



Всевозможные размещения получаются перестановками элементов в сочетаниях. Поэтому

$$A_n^m = C_n^m m!,$$

что даёт формулу для C_n^m , с учётом того, что $A_n^m = n!/(n-m)!$

4. Перестановки с повторениями. Пусть имеется n предметов k типов

$$\underbrace{a_1 \dots a_1}_{n_1} \underbrace{a_2 \dots a_2}_{n_2} \dots \underbrace{a_k \dots a_k}_{n_k},$$

где

$$n_1 + \dots + n_k = n.$$

Число различных перестановок этих предметов равно

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$



В любой перестановке рассматриваемой совокупности предметов, *ничего внешне не меняя*, можно n_1 элементов a_1 переставить между собой $n_1!$ способами, n_2 элементов a_2 — $n_2!$ способами, ..., n_k элементов a_k — $n_k!$ способами. Поэтому $n_1! n_2! \dots n_k!$ перестановок из $n!$ — неотличимы друг от друга, что приводит к указанной формуле.

Рассмотрим, наконец, ещё одну типичную ситуацию. Имеется k типов предметов, число образцов каждого типа — бесконечно. Число различных способов выбора r предметов в данном случае



$$U_k^r = k^r$$

Стандартный пример — десять (типов) цифр, каждую из которых при записи числа можно использовать в любом количестве экземпляров (шестизначных чисел — миллион, 10^6).

Упражнения

1. Доказать:

- $C_n^m = C_n^{n-m}$,
- $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$,

- $\frac{n+1}{k+1}C_n^k = C_{n+1}^{k+1},$
- $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}.$

2. Сколько различных чисел можно получить перестановкой цифр 1, 3, 7? (3!)

3. Сколько есть трехзначных чисел, в записи которых участвуют только цифры 1, 3, 7? (3^3)

4. Сколько есть различных чисел, в записи которых участвуют 1, 1, 2, т. е. две единицы и одна двойка? (3)

9.3 Бином Ньютона

При перемножении n сомножителей

$$(x+y)(x+y)\dots(x+y)$$

число членов вида $x^{n-k}y^k$ равно C_n^k , поскольку k штук y в n сомножителях можно выбрать числом способов C_n^k . Поэтому

$$(x+y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}y + C_n^2 x^{n-2}y^2 + \dots + C_n^{n-1}xy^{n-1} + y^n$$

Это формула *бинома Ньютона*, которая часто используется.

Полагая $x = y = 1$, получаем



$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

В случае $x = 1, \quad y = -1$, имеем

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0.$$



Упражнение

$$(x+y+z)^n = \sum P(k_1, k_2, k_3) x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3},$$

где суммирование идет по k_1, k_2, k_3 , удовлетворяющим условию $k_1 + k_2 + k_3 = n$.

Глава 10

Как строить графики

*День ото дня все кажется,
Что скоро все уляжется,
Утихнет, перемелется,
На дно осядет муть...
Оно же все не вяжется,
Бушует и куражится,
Не мелется, не стелется,
Не сходится ничуть.*

10.1 С чего начинать

В любой теме важно ощущать себя хозяином положения. Не юнгой, которому любой боцман может сказать: «пойди туда, не знаю куда», а именно хозяином. По крайней мере, начальником функций и графиков.



Ожидание чуда от высшей математики¹⁾ по части построения графиков нередко обманывает надежды. Причина банальна. *Самолет позволяет летать, но добираться до аэродрома надо самому.* Так и здесь. Ювелирные инструменты ювелирными, но

¹⁾ Ничтожно изучаемой в старших классах.

необходимо умение работать молотком. Требуются простейшие навыки, здравая логика. Многие сложные с виду графики очень просто строятся на основе здравого смысла, см. далее. И с этого как раз целесообразно начинать, добиваясь ощущений полёта орла²⁾. А начиная с предбанника простеньких графиков, легко там и остаться в психологическом состоянии осрамившегося зайца. Поэтому, поднимая с самого начала планку как можно выше, зачастую можно добиться феноменальных успехов, вопреки естественным опасениям³⁾.

10.2 Некоторые общие соображения

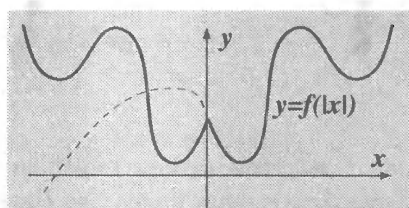
Разумеется, хвататься за сложные задачи желательно трезво, овладев предварительно стандартными инструментами и понятиями. Часто встречаются, скажем, функции, обладающие некоторыми свойствами симметрии. Например, *чётные функции*, характеризующиеся свойством

$$f(x) \equiv f(-x), \quad (10.1)$$

и *нечётные*, удовлетворяющие условию

$$f(-x) \equiv -f(x). \quad (10.2)$$

Свойства (10.1), (10.2) упрощают построение графика «наполовину». Скажем, если $f(x)$ чётна, то график достаточно построить для $x \geq 0$. Для отрицательных x график будет зеркально симметричен относительно оси y , рис. (10.3)



(10.3)

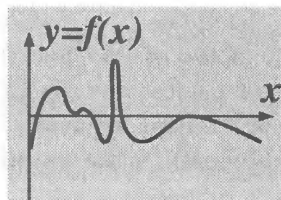
²⁾ Позволяющих иногда видеть и понимать то, что вам ещё никто не показывал.

³⁾ См. «Как мы с Мишей учили физику» — oschool.ru

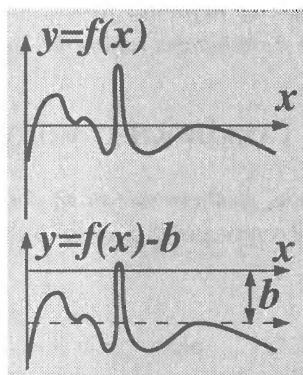
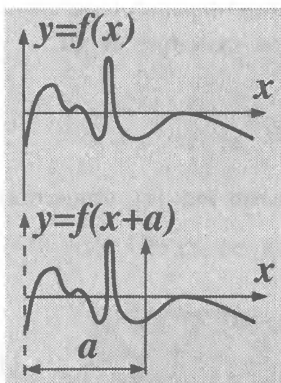
Чётной функцией всегда является $f(|x|)$. (?) Как ведёт себя график $f(x)$ при $x \leq 0$ в этом случае — никакой роли не играет⁴⁾.

• Придумайте несколько примеров *нечётных функций* и постройте их графики. (?)

Следующий приём эффективно работает, когда известен график $y = f(x)$, а нам требуется график $y = f(x + a)$ или $y = f(x) - b$, а то и $y = f(x + a) - b$.



С такой ситуацией мы уже сталкивались при изучении квадратного многочлена. И использованный там трюк работает и в общем случае. Для построения $y = f(x + a)$ график $y = f(x)$ достаточно сдвинуть *влево/вправо*⁵⁾, а для $y = f(x) - b$ — *вверх/вниз*.



Понятно, сдвиг графика *влево/вправо* можно заменить сдвигом оси *y* *вправо/влево*. Аналогично со сдвигом оси *x* *вниз/вверх*. Вопрос в том, при переходе от $y = f(x)$ к $y = f(x + a)$ ось *y* надо сдвигать вправо или влево? Мнемонический приём здесь простой, ось *y* надо сдвигать так, чтобы она прошла через точку

⁴⁾ Например, как обозначено пунктиром или как-то по-другому.

⁵⁾ В зависимости от знака a .

$x = a$. Значит, при $a > 0$ — *вправо*, при $a < 0$ — *влево*. Градуировку шкалы x потом, разумеется, надо изменить⁶⁾. Если же сдвигаем сам график, градуировку менять не надо. В голове эти два рецепта (или двигать ось, или — график) часто путаются, и тогда мы реагируем неадекватно.

Но если, не дай бог, вы попытаетесь сформулировать и запомнить правило типа «если минус, то график вправо — ось y влево», вы будете потом мучиться с этим «пустячком» всю последующую жизнь. Потому что важно понимать и применять сам механизм, а не выдаваемые результаты.

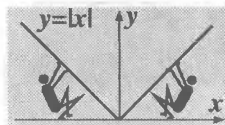


Тяга к запоминанию «результатов» проистекает из-за привычки многое делать с выключенными мозгами. Сдавать экзамены, решать задачи, и вообще жить. Эффект сами знаете какой. Мозги замечательные, но обесточены. Работает только механическая память, дающая то и дело сбои, и не помнящая хорошо, где спрятаны шпаргалки. В итоге возникают заболевания на нервной почве, и больницы переполнены людьми, которые с детства ленились понимать простые вещи.

10.3 Графики с модулями

Напомним, *модуль числа* x , обозначаемый как $|x|$, представляет собой кусочно-линейную функцию

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$



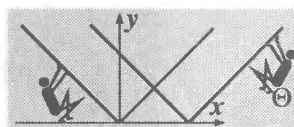
(10.4)

Теперь обратимся к замене координат, каковая представляет собой весьма эффективный инструмент. Широко применяется, спасает от трудоёмких операций, упрощает анализ, способствует

⁶⁾ Если, например, $a = 2$, и $x = 2$ стало нулём, то и все остальные значения делений надо уменьшить на 2.

визуальному контролю. При этом говорить особенно не о чем — вроде бы.

Для перехода от $y = |x|$ к $y = |x - 3|$ график (10.4) сдвигаем вправо,

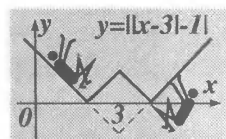


(10.5)

Если же вычесть ещё единицу, $y = |x - 3| - 1$, то график (10.5) надо опустить вниз на единицу, а если потом взять модуль,

$$y = ||x - 3| - 1|,$$

то надо ещё зеркально относительно оси иксов отобразить нижнюю часть, пунктир на рис. (10.6).



(10.6)

А что если теперь вздумается надеть модуль на x ,

$$y = |||x| - 3| - 1|?$$

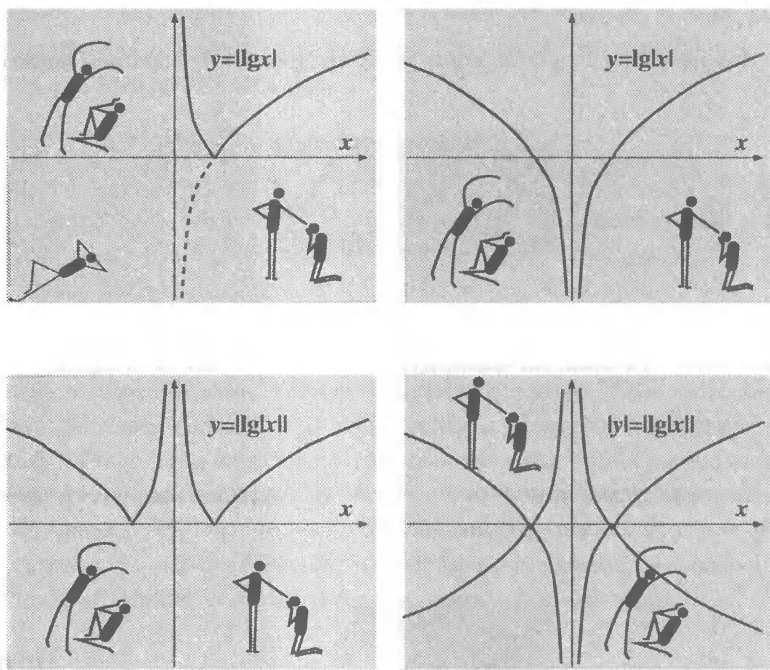
Надо ли всё начинать сначала? Не надо. Какова бы ни была функция $y = f(x)$, функция $y = f(|x|)$ — чётна, и работает зеркальная симметрия как на рис. (10.3).

Вот несколько спортивных снарядов для упражнений:

$$y = |\lg x|, \quad y = \lg |x|, \quad y = \lg |x + 1|,$$

$$y = \lg |x - 1|, \quad y = |\lg |x - 1| - 1|.$$

Кое-что запечатлено на картинках:



10.4 Потенциал здравого смысла

График функции вида

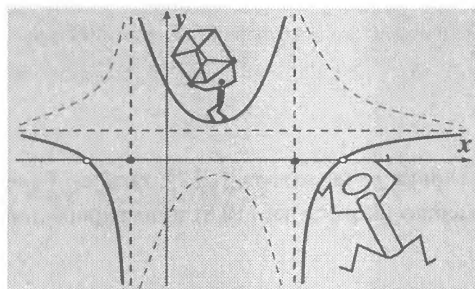
$$y = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d} \quad (10.7)$$

в средней школе выглядит заморским фруктом. Но он легко строится. В основном с помощью здравого смысла.

Во-первых, при $x \rightarrow \infty$

$$\frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d} = \frac{1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}}{1 + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2}} \rightarrow 1.$$

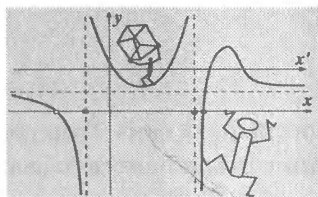
Поэтому на бесконечности график будет приближаться к *горизонтальной асимптоте* $y \equiv 1$. Во-вторых, $y \rightarrow \infty$, график уходит в бесконечность, когда знаменатель обращается в ноль — поэтому корни знаменателя задают *вертикальные асимптоты*. Остальное определяется расположением корней числителя и знаменателя. Например, если корни числителя (белые кружочки) и знаменателя (чёрные кружочки) расположены на оси x так, как на рис. (10.8), то графиком (10.7) будут сплошные кривые:



(10.8)

Построение графика здесь опирается на простые соображения. При переходе нуля числителя или знаменателя функция y меняет знак. Поэтому, если слева от *вертикальной асимптоты* график уходит вниз, то справа — обязан уходить вверх, и наоборот. Выбрать нижнюю или верхнюю ветвь помогает наличие или отсутствие корня числителя в соответствующем диапазоне⁷⁾.

На первый взгляд не очень ясно, почему график будет плавно монотонным на характерных участках, без всплесков и аномалий. Почему не годится, например,



(10.9)

⁷⁾ Именно поэтому левая и правая пунктирные — исключаются.

вместо предыдущего? Вопрос поначалу кажется убийственным, но решается просто. Потому что график функции

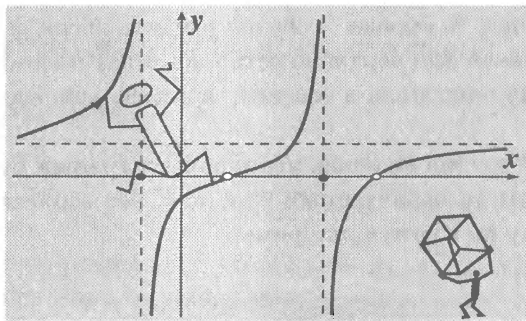
$$y = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d} - \gamma \quad (10.10)$$

получается смещением графика функции (10.7) на $\gamma > 0$ вниз, равносильно, поднятием оси иксов на $\gamma > 0$ вверх. При этом у функции (10.10) при некотором γ может возникнуть 4 нуля, как на рис. (10.9), чего быть не может⁸⁾, поскольку (10.10) — функция того же класса, квадратный многочлен делённый на квадратный.

При отсутствии корней у числителя (10.7), график будет вести себя так, как показано на рисунке (10.8) пунктирной линией.



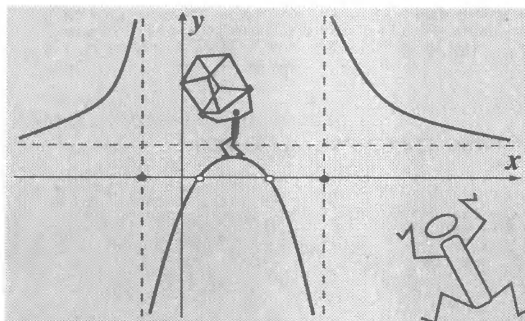
Если же корни числителя и знаменателя, *перемежаются*, то график будет таким:



То есть для оценки вида графика сама функция даже не нужна. Достаточно указать асимптоты и пометить белыми кружочками

⁸⁾ Корней может быть, максимум, два, как у квадратного уравнения.

нули функции (корни числителя). Допустим, корни знаменателя крайние. Картина маслом получается такая:



10.5 Другие варианты

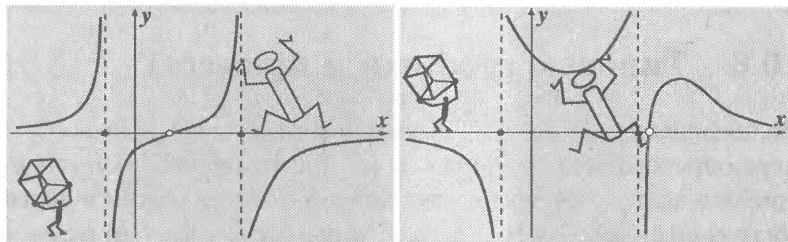
В случае

$$y = \frac{ax + b}{x^2 + cx + d} \quad (10.11)$$

при $x \rightarrow \infty$

$$\frac{ax + b}{x^2 + cx + d} = \frac{\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}}{1 + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2}} \rightarrow 0.$$

Поэтому горизонтальной асимптотой является ось x . Варианты:



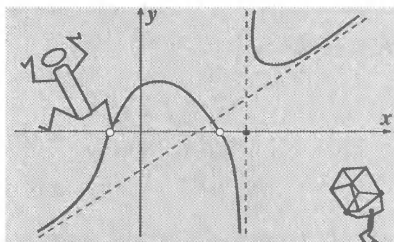
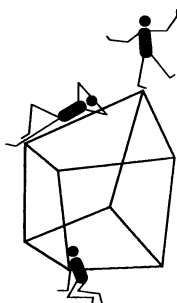
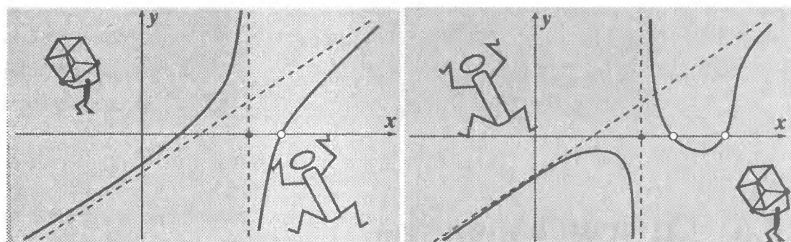
В случае

$$y = \frac{x^2 + ax + b}{cx + d} \quad (10.12)$$

при $x \rightarrow \infty$ возникает наклонная асимптота:

$$\frac{x^2 + ax + b}{cx + d} = \frac{x + a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}} \rightarrow \frac{x + a}{c}.$$

Логика построения графиков прежняя.



10.6 Типовые графики и примеры

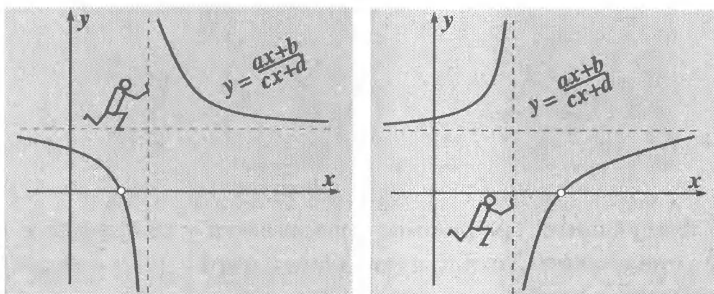
На проделанную выше работу важно смотреть не как на ассортимент опробованных графиков, а как на совокупность методов и приёмов построения графиков, которые годятся совсем в других обстоятельствах. Стил и логика мышления — вот что главное.

Например, построение графика функции $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ не должно вызывать затруднений не потому, что он проще (10.7), а потому что логика построения та же самая. Вертикальная асимптота —

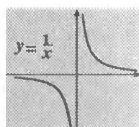
там, где знаменатель обращается в ноль. Корень числителя — точка пересечения с осью иксов. Горизонтальная асимптота:

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow \frac{a}{c}.$$

В результате получается два варианта,



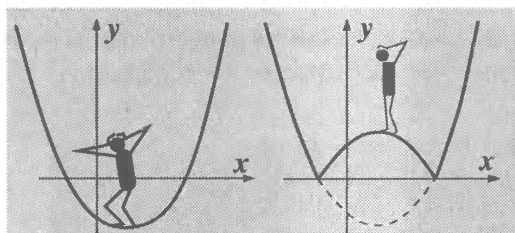
два варианта *гиперболы*



после параллельного пере-

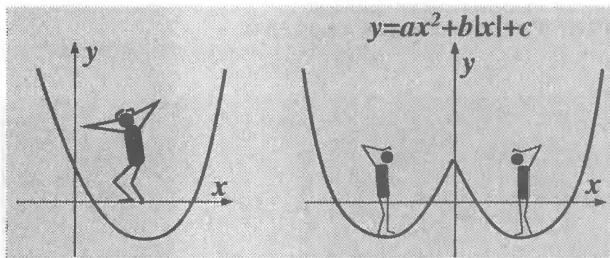
носа осей координат при возможном растяжении/сжатии и зеркальном отражении.

В колею рассмотренного в предыдущих разделах непосредственно вписывается график $y = |ax^2 + bx + c|$.

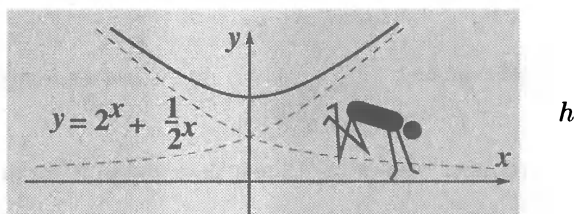


Часть параболы ниже оси иксов, если таковая была, зеркально отражается вверх. Разумеется, ничего нового. Но иногда полезно

рассмотреть частные случаи общеизвестного. Например о чётных функциях мы уже говорили, и там всё просто, но иногда что-то мешает взглянуть на $y = ax^2 + b|x| + c$ как на чётную функцию.

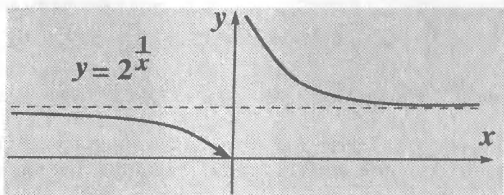


Со следующими графиками предлагается разобраться в качестве упражнения. Хотя краткие комментарии здесь вполне заменяют разбор полётов, поскольку и так всё на виду.

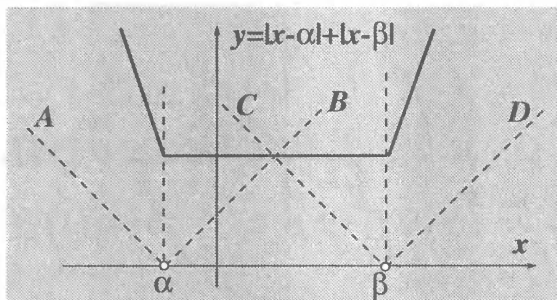


Графики $y = 2^x$ и $y = 2^{-x}$ изображены пунктиром. Их надо просто сложить.

Следующая штукавина $y = 2^{1/x}$ представляет собой функцию от функции. Здесь приходится поразмыслить в рамках тройной спирали Эриксона. Всё просто, но неудобно.

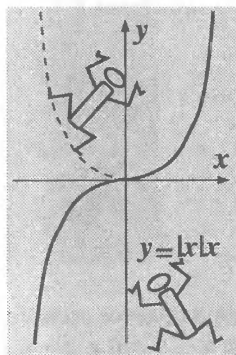
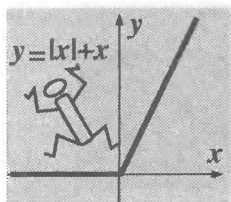


Другой фокус $y = |x - \alpha| + |x - \beta|$ с ходу может показаться сложным, но процесс развивается вдоль пройденного пути. Изображённые пунктиром графики $y = |x - \alpha|$, $y = |x - \beta|$ надо сложить, и всё. Получается толстая ломаная.



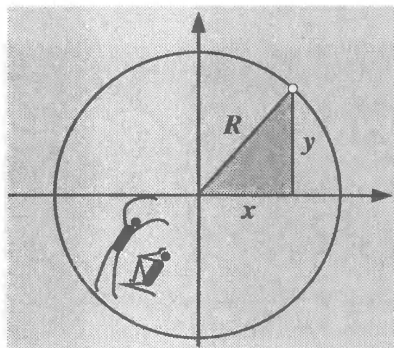
При малом опыте можно пойти другим путём. Для $x \geq \beta \geq \alpha$ модули $y = |x - \alpha| + |x - \beta|$ можно снять. Получится функция $y = 2x - \alpha - \beta$. В случае $x \leq \alpha \leq \beta$ при снятии модулей надо поменять знаки, см. (10.4). Получится $y = -2x + \alpha + \beta$. Наконец, в случае $\alpha \leq x \leq \beta$ с $|x - \alpha|$ модуль просто снимается, а снятие модуля с $|x - \beta|$ требует изменения знака. Остаётся $y = \beta - \alpha$.

Два последних графика без комментариев.



10.7 Геометрические места точек

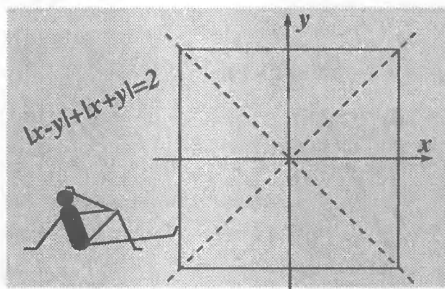
Графиком $x^2 + y^2 = R^2$ является *окружность*, что очевидно из рассмотрения прямоугольного треугольника на рис. (10.13).



(10.13)

Насчёт графика мы тут закинули удочку некорректно. Где тут аргумент, где функция? Ни y по x , ни x по y однозначно не вычисляются. Тем не менее в подобных ситуациях о графиках всё же говорят. Противники неаккуратной терминологии отдают предпочтение термину «*геометрическое место точек*», каковым действительно является окружность (10.13) для $x^2 + y^2 = R^2$.

А вот квадрат (10.14) как *геометрическое место точек*, удовлетворяющих соотношению $|x - y| + |x + y| = 2$.



(10.14)

Для разбора полётов делим пунктирами плоскость на четыре сектора. В правом: $x - y \geq 0$ и $x + y \geq 0$. Поэтому здесь y сокращается,

$$|x - y| + |x + y| = 2 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1.$$

В трёх других секторах возникают остальные стороны квадрата.

Глава 11

Суммирование последовательностей

*Подход «на пальцах»
раскрепощает и вдохновляет.*

11.1 Арифметическая прогрессия

Числовая последовательность вида

$$a_1, a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, \dots, a_n = a_1 + (n-1)d, \dots \quad (11.1)$$



называется *арифметической прогрессией*, величину d именуют *разностью прогрессии*. При $d > 0$ прогрессия *возрастает*, при $d < 0$ — *убывает*.

Каждое число в (11.1), начиная со второго, получается из предыдущего добавлением к нему числа d , т. е.

$$a_n = a_{n-1} + d.$$

В результате $a_n = a_1 + (n-1)d$. Очевидно, при $n \geq 2$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},$$

что считается *характеристическим свойством арифметической прогрессии*¹⁾. Наконец, сумма первых n членов арифметической

¹⁾ Каждый член a_n является *средним арифметическим* двух соседних.

прогрессии $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ даётся формулой

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \quad \text{🧑} \quad (11.2)$$

◀ Выводится (11.2) легко. Выпишем прогрессию в порядке возрастания номеров a_k , а во второй строчке — в порядке убывания:

$$\begin{array}{cccccc} \text{🧑} & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1. \end{array} \quad (11.3)$$

Сумма чисел в каждом столбце (11.3) одинакова. Потому что при переходе от $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_n \end{bmatrix}$ к следующему столбцу $\begin{bmatrix} a_2 \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$ верхнее число увеличивается на d , нижнее — уменьшается на d . И так каждый раз при переходе к следующему столбцу. Поэтому сумма (11.3) по столбцам равна $(a_1 + a_n) \cdot n$. С другой стороны, эта сумма равна $2S_n$, поскольку каждое a_k входит в (11.3) два раза. Таким образом

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n. \quad \blacktriangleright$$

11.2 Геометрическая прогрессия

Числовая последовательность вида

$$b_1, \quad b_2 = b_1 q, \quad b_3 = b_2 q, \quad \dots, \quad b_n = b_{n-1} q, \quad \dots \quad (11.4)$$

называется *геометрической прогрессией*, величину q именуют *знаменателем прогрессии*. Очевидно, $b_n = b_1 q^{n-1}$. Понятно, что $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}$, т. е. каждый член b_n по модулю, начиная со второго, есть *среднее геометрическое*²⁾ двух соседних.

- Если b_n — геометрическая прогрессия, то $\lg b_n$ — арифметическая. (?)

Заметим, что при $b_1 > 0$ и $q > 1$, прогрессия является *возрастающей последовательностью*, если $0 < q < 1$ — *убывающей*, а при $q < 0$ — *знакопередающей*.

²⁾ Отсюда происходит название прогрессии.

Сумма $S_n = \sum_{j=1}^n b_j$ первых n членов прогрессии:



$$S_n = \frac{b_1(1 - q^{n+1})}{1 - q} \quad \text{при условии } q \neq 1. \quad (11.5)$$

В случае $q = 1$, очевидно, $S_n = nb_1$.

◀ Фокус, приводящий к (11.5), довольно прост. Поскольку

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^n = b_1(1 + q + q^2 + \dots + q^n),$$

вопрос упирается в суммирование $1 + q + q^2 + \dots + q^n$, которое легко выполняется умножением на $1 - q$,

$$(1 + q + q^2 + \dots + q^n)(1 - q) = 1 + q + \dots + q^n - q - \dots - q^n - q^{n+1} = 1 - q^{n+1},$$

откуда и получается (11.5). ▶

Если $0 < q < 1$, то $q^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а значит и $b_n = b_1q^n \rightarrow 0$. Такие прогрессии называют *бесконечно убывающими*, и для них имеют смысл бесконечные суммы

$$S_\infty = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots = b_1(1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots),$$

Из (11.5) ясно, что

$$S_\infty = \frac{b_1}{1 - q}, \quad \text{и } \text{человек в позе лотоса} \quad (11.6)$$

если под S_∞ понимать предел S_n при $n \rightarrow \infty$.

Понятие предела время от времени всплывает в школе по разным поводам, оставаясь в приблизительной позиции. И с этим ничего делать не надо. Потому что всему своё время.

11.3 Трюк вычисления двумя способами

Вывод формулы (11.5) довольно прост, но действовать можно было изобретательнее. Из $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ получить³⁾

³⁾ Для простоты полагаем $b_1 = 1$.

S_{n+1} можно как $S_n + q^{n+1}$, а можно и как $qS_n + 1$, откуда

$$S_n + q^{n+1} = qS_n + 1.$$

Решение этого уравнения относительно S_n даёт (11.5)⁴⁾.

На геометрической прогрессии выигрыш не так велик, но фокус составления уравнения для искомой суммы продуктивен во многих ситуациях. Найти, скажем, сумму

$$S_n = 1 + x + 2x^2 + \dots + nx^n. \quad (11.7)$$

С одной стороны, олимпиадная задача. С другой стороны, пустьак, ибо действуя тем же макаром, вычисляем S_{n+1} двумя способами. В результате приходим к уравнению

$$S_n + (n+1)x^{n+1} = xS_n + 1 + \underbrace{x^2 + \dots + x^{n+1}}_{=x^2 \frac{1-x^n}{1-x}}$$



Дальнейшее — дело техники. Нас в данном случае интересует лишь сама идея решения. Желающие могут легко довести дилижанс до финиша.

11.4 Камуфлируя банальные факты

Суммирование часто базируется на замаскированных трафаретах. Например,

$$\zeta_1 - \zeta_2 + \zeta_2 - \zeta_3 + \dots + \zeta_n - \zeta_{n+1} = \zeta_1 - \zeta_{n+1}, \quad (11.8)$$

в другом облике может озадачить нас чем-нибудь вроде

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad (11.9)$$

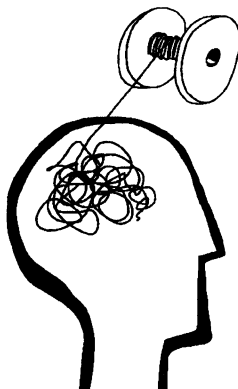
⁴⁾ Для S_∞ получается уравнение (напоминаем, $b_1 = 1$): $S_\infty = qS_\infty + 1$.

и на пару минут вполне можно растеряться, не сразу осознав возможность

$$\zeta_k = \frac{1}{k} \quad \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)} = \frac{1}{k \cdot (k+1)}$$



И следствий типа (11.9) из (11.8) — не счесть, о чём жизнь то и дело напоминает. Контраст бывает разителен. Грандиозные следствия как бы опираются на ничтожные причины. Вспомните, лежащее в основе механики $ma = f$, а какие сложные бывают физические задачи. Так что, то ли Создатель широко пользовался такой техникой, то ли оно само так получилось, но мы вынуждены постоянно иметь дело с фактами типа (11.9). Голые причины вида (11.8) тоже в поле зрения, но их потенциал «не выпирает», связи не видны, и мир — в ловушке кривых зеркал. Следствия дразнят загадочностью, а причины незаметны из-за банальности.



Глава 12

Преобразования, тождества, уравнения

*Ability may get you to the top,
but it takes character to keep you there.*
John Wooden

12.1 Опорные точки

Значительная часть школьного математического образования сводится к переливанию из пустого в порожнее в связи с тождественными преобразованиями. Жаловаться не имеет смысла, потому что и жизнь к тому сводится на прямолинейных участках пути. Но если причины инерции бытия в глубинах Вселенной, то здесь истоки на поверхности, и с ними есть надежда справиться.

Снежный ком тождественных преобразований вращается в основном вокруг простейших *тождеств*¹⁾ типа

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \quad (12.1)$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2, \quad (12.2)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm a^3, \quad (12.3)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2), \quad (12.4)$$

¹⁾ *Тождеством* называется равенство, справедливое при любых значениях входящих в него переменных.

которые получаются элементарным раскрытием скобок и приведением подобных. А предлагаемые в задачнике упражнения представляют собой различные комбинации (12.1) – (12.4) вперемешку с некоторыми усложнениями²⁾ для обеспечения дискомфорта учащихся. Кроме того, помимо алгебраических фокусов (12.1) – (12.4) используются хромосомы показательных и логарифмических функций, что в совокупности до чёртиков запутывает население³⁾.

Всё это вместе взятое — суть технический арсенал без какой бы то ни было идеологии в подоплёке. Однако тематика в школе сильно гиперболизирована. Кому-то кажется, надо полагать, что тяжеловесные манипуляции развивают внимание и тренируют дисциплину ума, каковые временами действительно полезны, но не до такой же степени. Тем не менее все вынуждены соблюдать правила Законодателя, фокусируясь на преобразованиях.



Искать тут облегчение в каких-нибудь волшебных таблетках — безнадежно. Выход из положения один — решать задачи до наступления второго дыхания. Только по достижению этого предела становится вдруг легко, и жизнь начинает играть нормальными красками. Так что надо брать задачники: с решениями, без решений — и тренироваться. Самостоятельное решение даёт больше пользы, но для разгона полезно время от времени наблюдать, как из щекотливых положений выкручиваются другие. Данная глава и две следующие дают лишь импульс в должном направлении.

²⁾ Использование громоздких выражений вместо a , b , внедрение иррациональностей, подстановка «неуклюжих» числовых значений.

³⁾ Хотя к списку (12.1)–(12.4) всего-то добавляется несколько свойств экспоненты и логарифма.

12.2 О самородках в рутине


Рутина в тождественных преобразованиях состоит в простеньких преобразованиях, которые надо *подобрать* к задаче. Как-то сгруппировать слагаемые, вынести общий сомножитель, что-либо добавить (если не хватает) и тут же вычесть (чтобы ничего не поменялось) и т. п. Осваивая сие ремесло, конечно, надо познакомиться с образцами, которые в изобилии разбросаны по задачникам и по Интернету. Выкладывать ассортимент в учебнике неуместно — засоряется обзор. Но хотя бы кое-что упомянуть надо. Собственно, по ходу дела нечто подобное уже демонстрировалось. См., например, путь к разложению на множители квадратного многочлена (6.5).

Вот более сложный пример:

$$\begin{aligned}
 & x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \\
 &= x^3 + 3xy(x + y) + y^3 + z^3 - 3xyz - 3xy(x + y) = \\
 &= (x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y + z) = \\
 &= \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2].
 \end{aligned} \tag{12.5}$$

Конечно, проследить готовую цепочку (12.5) нетрудно. Сложно другое. Когда проблема заключается в разложении на множители $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, на какие — не сказано. В этом случае необходимо «смотреть вперед», догадываться, прогнозировать.

Особый интерес представляют те задачи, в которых тождество устанавливается идейно, а не рутинно. Вот показательный пример.



$$\frac{(x - a)(x - b)}{(c - a)(c - b)} + \frac{(x - a)(x - c)}{(b - a)(b - c)} + \frac{(x - b)(x - c)}{(a - b)(a - c)} \equiv 1, \tag{12.6}$$

где a, b, c не равны друг другу попарно.

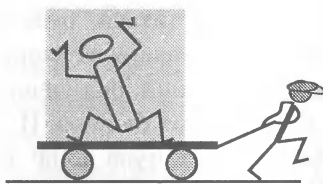
Разумеется, в (12.6) можно раскрыть скобки, привести подобные — и концы с концами автоматически сойдутся. Но это долгая песня. Проще взглянуть на задачу с высоты птичьего полёта. Раскрытие скобок и

приведение подобных в (12.6) даст, очевидно, квадратное уравнение⁴⁾

$$Ax^2 + Bx + C = 1,$$

каковое не может в принципе иметь более двух корней. Но оно имеет три разных корня, ибо подстановка в (12.6) $x = a$, $x = b$, $x = c$ даёт равенство. Следовательно, $A = B = 0$, $C = 1$. Всё!

Обратим внимание, что та же самая (по сути) задача могла быть сформулирована в более коварной форме: *упростить выражение, стоящее в левой части (12.6)*. И тогда вы могли бы дать ответ «=1», всего лишь умствуя насчёт квадратного уравнения, и не производя на бумаге никаких преобразований.



12.3 Разложение на множители

Эталонную задачу разложения на множители мы решали в гл. 6, представляя $x^2 + px + q$ в виде произведения $(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 , x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$. Используемая там идея *выделения полного квадрата* довольно часто эксплуатируется вкупе с другими банальными приёмами (группировка слагаемых, вынос за скобки общего множителя).

При необходимости разложить на множители многочлен $P_n(x)$ степени $n > 2$ приходится дополнительно изворачиваться. Присмотревшись, скажем, к $x^4 - x^2 + 2x - 1$ можно увидеть вживлённую формулу разности квадратов,

$$x^4 - x^2 + 2x - 1 = (x^2)^2 - (x - 1)^2, \quad \text{сидящий}$$

откуда в один клик возникает разложение

$$x^4 - x^2 + 2x - 1 = (x^2 + x - 1)(x^2 - x + 1). \quad (12.7)$$

⁴⁾ Коэффициенты которого A , B , C нам как раз лень определять.

Разложение на множители смотрится иногда как казуистика, сфабрикованная, чтобы донимать население. Но в принципе — это полезный инструмент решения более осмысленных задач. Скажем при необходимости решить уравнение

$$x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0 \quad (12.8)$$

логична попытка разложить полином на множители (12.7), что сводит исходную задачу к решению двух квадратных уравнений

$$x^2 + x - 1 = 0, \quad x^2 - x + 1 = 0. \quad (12.9)$$

Составители задач проделывают тот же путь в противоположном направлении. Перемножая уравнения (12.9), замечают следы и предлагают нам помучиться, решая (12.8). При этом недостаток изопрённости компенсируют злонамеренностью⁵⁾. Поэтому нельзя исключать уравнений, полученных перемножением $P_2(x) = 0$ на $Q_2(x) = 0$, взятых от фонаря. И тогда мы попадаем в неприятную ситуацию «пойди туда — не знаю куда, принеси то — не знаю что». Но искать как-то приходится, для чего выдвигаются гипотезы, догадки. Пусть, скажем, многочлен $P_4(x)$ получился в результате перемножения



$$(x^2 - bx + c)(x^2 + x - d). \quad (12.10)$$

Для определения b, c, d раскрываем в (12.10) скобки, приводим подобные и приравниваем коэффициенты при x^k соответствующим коэффициентам в $P_4(x)$, после чего проклинаем полученную для b, c, d систему уравнений⁶⁾, ибо та не решается. Но может и повезти.

Другой способ борьбы с авторами задач состоит в угадывании корней многочлена, что в силу

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

⁵⁾ В то время как: «Бог изопрён, но не злонамерен», — говорил *Эйнштейн*.

⁶⁾ Составление такого сорта систем уравнений называют *методом неопределённых коэффициентов*.

см. (6.24), даёт возможность понизить порядок уравнения за счёт деления в столбик $P_n(x)$ на $(x - x_j)$, см. раздел 6.9. Что касается «угадывания», то здесь подразумевается в основном использование свойств целых корней, раздел 6.10.

Наконец, можно плюнуть и пойти играть в футбол⁷⁾. Но в любом случае полезно помнить, что сталкиваясь с задачей, вы боретесь не только с ней самой, но и с автором задачи, стоящим за кадром. Именно в таком положении каждый раз оказывается сыщик-криминалист.

12.4 Секреты маскировки

Психологическая борьба с автором задачника должна опираться на рациональные представления о секретах противника. И как детективу полезно знать приёмы жуликов, так и школьнику имеет смысл располагать коллекцией фокусов, используемых составителями задач. Вот некоторые популярные трюки.



1. Простейшая идея маскировки очевидного: разрушение структуры с помощью *замены переменной*. Уравнение

$$(y - a)^4 + (y + a)^4 = b \quad (12.11)$$

легко решается, ибо после раскрытия скобок и приведения подобных переходит в *биквадратное*⁸⁾

$$2y^4 + 12a^2y^2 = b.$$

Однако замена $y = x + c$ переводит (12.11) в

$$(x + c - a)^4 + (x + c + a)^4 = b,$$

⁷⁾ Многие потом бегают по зелёному полю до седых волос.

⁸⁾ Напомним, *биквадратное* — легко решается, потому что после замены $y^2 = z$ переходит — в квадратное.

т. е.

$$(x + \alpha)^4 + (x + \beta)^4 = b. \quad (12.12)$$

Раскрытие скобок в (12.12) уже не сулит ничего хорошего. Надо догадаться произвести предварительную замену



$$x = y - \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad (12.13)$$

хотя до целесообразности замены вида $x = y + \gamma$ любой сыщик рано или поздно додумается. Далее останется подобрать γ .

2. Другой трюк. Уравнение

$$(x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 + \alpha x + \gamma) = \zeta \quad (12.14)$$

решается благодаря равенству коэффициентов при x в сомножителях (12.14), из-за чего после преобразования

$$\left[\left(x + \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4} \right] \left[\left(x + \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \gamma - \frac{\alpha^2}{4} \right] = \zeta$$

и замены $x + \frac{\alpha}{2} = z$ оно переходит в биквадратное уравнение.

Для заматания следов в (12.14) производим разложение

$$x^2 + \alpha x + \beta = (x - a)(x - b); \quad x^2 + \alpha x + \gamma = (x - c)(x - d),$$

и предлагаем решить уравнение

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = \zeta \quad (12.15)$$

при условии $a + b = c + d$, что как раз позволяет подняться от (8) к (12.14), благодаря $a + b = c + d = -\alpha$.

3. Вот ещё одна, вообще говоря, гениальная идея разложения на множители. Уравнение



$$x^3 + (1 + \sqrt{7})x^2 + 7 = 0, \quad (12.16)$$

если переписать в виде

$$x^3 + (1 + y)x^2 + y^2 = 0, \quad (12.17)$$

не обращая пока внимания, что (12.17) при $y = \sqrt{7}$ совпадает с (12.16), и решить (12.17) как квадратное уравнение относительно y , то получим два корня

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^2 - x,$$

что влечёт за собой

$$x^3 + (1 + y)x^2 + y^2 = (y - x)(y - x^2 + x), \quad (12.18)$$

и после подстановки $y = \sqrt{7}$ в (12.18) обеспечивает разложение

$$x^3 + (1 + \sqrt{7})x^2 + 7 = (\sqrt{7} - x)(\sqrt{7} - x^2 + x), \quad (12.19)$$

решая тем самым (12.16):

$$x_1 = \sqrt{7}, \quad x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{7}}}{2},$$



где $x_{2,3}$ — корни квадратного уравнения $x^2 - x - \sqrt{7} = 0$.

4. Тропы в зарослях задач давно протоптаны. Нехоженные просеки встречаются редко, больше на олимпиадах. Так что рядовые задачи решаются в основном проторёнными путями, каковых не так много. Вот пример использования симметрии уравнения.

$$ax^4 + bx^5 + cx^2 + bx + a = 0, \quad (12.20)$$

При условии⁹⁾ $a \neq 0$ деление (12.20) на x^2 ведёт к уравнению

$$a \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + b \left(x + \frac{1}{x} \right) + c = 0. \quad (12.21)$$

Вводя теперь переменную $z = x + \frac{1}{x}$ и учитывая $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$, получаем квадратное уравнение относительно z . Находим его корни $z_{1,2}$. Далее решаем ещё два квадратных уравнения $x + \frac{1}{x} = z_j$ относительно x . Уравнение (12.20) решено.

Перечисленные *трюки* обычно исключаются из всеобщего образования, а зря. По той же причине, кстати, в некоторые таблетки добавляют лечащего вещества в несколько раз меньше,

⁹⁾ В противном случае (12.20) сводится к квадратному уравнению.

чем надо было бы. Абы чего не вышло. Но там есть выход. В стационаре под контролем врачей применяют совсем другие дозировки. Что же касается образования, то отдушины тоже есть, типа физмат-школ. Но и в средней школе можно и нужно действовать смелее. Не смертельно же, в конце концов, если кому-то пара задач окажется не по зубам. Да и постоянный успех необязателен. А уж рассказать о «вероломстве» составителей задач сам бог велел.

Тем более, что такой рассказ может подвигнуть некоторых взять быка за рога. Не боги, дескать, горшки обжигают. Главный-то инструмент выживания, в самых разных его аспектах, — это ДОГАДКА. Не рутинные методы, каковым учит школа, а способность прозревать — вот что спасает в критических ситуациях, будь то война или экзамен. Умение выдвигать гипотезы, анализировать их, отсеивать, выбираться из тупиков заблуждения — вот чему хорошо бы учиться.

12.5 Избавление от иррациональности

Одна из напрягающих игр для школьников — война с радикалами в знаменателе. При этом широко используется *рецепт РК*¹⁰⁾:

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{(1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2}.$$



Тот же фокус работает и в более сложных ситуациях.

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1)}{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1}{2 + 3 - 1 + 2\sqrt{2} \cdot 3}.$$

Исходное выражение преобразуется к виду $\frac{\alpha}{\beta + 2\sqrt{6}}$, и теперь повторный трюк *РК* окончательно избавляет знаменатель от радикалов. Другой вариант сложного радикала:

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{(1 - \sqrt{2 + \sqrt{3}})}{(1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}})(1 - \sqrt{2 + \sqrt{3}})} = \frac{1 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{1 - 2 - \sqrt{3}}.$$

¹⁰⁾ Использующий формулу разности квадратов $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Снова получается дробь вида $\frac{\alpha}{\beta - \sqrt{3}}$, и умножение числителя и знаменателя на $\beta + \sqrt{3}$ решает проблему окончательно.

12.6 Иррациональные уравнения

Среди задач довольно популярны уравнения с радикалами. В качестве инструментов упрощения и трансформации здесь используются различные инструменты на основе стандартных формул типа (12.1)–(12.4). Особой эффективностью отличаются удачно подобранные *замены переменных*. Допустим, речь идёт об уравнении



$$\sqrt{ax^2 + bx + 5} + \sqrt{ax^2 + bx + 7} = \zeta. \quad (12.22)$$

Возведение (12.22) в квадрат с последующим уединением радикала и повторным возведением в квадрат, конечно, избавляет от иррациональности, но приводит к уравнению 4-й степени, не говоря о громоздких промежуточных преобразованиях. Введение новой переменной,

$$z = ax^2 + bx + 5,$$

как будто открывает второе дыхание, и задача буквально своим ходом начинает двигаться к саморазоблачению:

$$\sqrt{z} + \sqrt{z+2} = \zeta \Rightarrow 2z + 2 + 2\sqrt{z^2 + z} = \zeta^2 \Rightarrow 4(z^2 + z) = (\zeta^2 - 2z - 2)^2.$$

Короче говоря, получается квадратное уравнение относительно z . Если оно имеет корни $z_{1,2}$, остаётся решить ещё два квадратных уравнения $ax^2 + bx + 5 = z_{1,2}$. Всё.

12.7 Системы уравнений

Если уравнение $f(x) = 0$ — это одно равенство, которому необходимо удовлетворить выбором подходящего значения x , то система уравнений — это уже несколько равенств с несколькими

переменными. Например,

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ x - y = 2. \end{cases} \quad \text{👤 👤} \quad (12.23)$$

Складывая уравнения (12.23), получаем $2x = 10 \Rightarrow x = 5$. А вычитая второе уравнение из первого, имеем $2y = 6 \Rightarrow y = 3$. Ответ $\boxed{x = 5, y = 3}$. При этих значениях удовлетворяются оба уравнения (12.23) одновременно.

Систему уравнений,

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3, \end{cases} \quad \text{👤 👤} \quad (12.24)$$

можно решать универсальным методом подстановки. Из первого уравнения выражаем $y = 4 - x$, подставляем во второе: $x(4 - x) = 3$. Решаем полученное квадратное уравнение относительно x и т. д. Но можно воспользоваться *теоремой Виета*. Считая x, y в (12.24) корнями квадратного уравнения

$$t^2 - 4t + 3 = 0,$$

и далее пользуясь стандартной формулой для корней $t_{1,2} = \{1, 3\}$. Но решений у (12.24), конечно, два: $\{1, 3\}$, $\{3, 1\}$.


Простейшие эталоны (12.23), (12.24) встречаются в другом облике, где их бывает даже трудно узнать. Вот пока стерильный вариант,

$$\begin{cases} xy = a, \\ yz = b, \\ zx = c. \end{cases} \quad \text{👤} \quad (12.25)$$

Перемножая все уравнения (12.25), получаем $xyz = \sqrt{abc}$, что после деления на каждое уравнение (12.25), даёт

$$x = \sqrt{\frac{ac}{b}}, \quad y = \sqrt{\frac{ab}{c}}, \quad z = \sqrt{\frac{bc}{a}}.$$

Если вместо (12.25) предлагается другая система



$$\begin{cases} x + y = a, \\ y + z = b, \\ z + x = c, \end{cases} \quad (12.26)$$

то ясно, работает та же идея с заменой умножения сложением.

Задачники огорчают учащихся с помощью всякого рода нагромождений и вилианий в сторону. Вот простая задача,

$$\begin{cases} 2 - y^2 = \sqrt{x - y}, \\ \sqrt{x - y - 4} + x + y = 2, \end{cases} \quad (12.27)$$

но она требует уверенного хозяйского осмотра и учёта привходящих обстоятельств. То есть прежде чем предпринимать какие-то действия, надо внимательно присмотреться, с чем мы имеем дело. Итак, из первого уравнения ясно, что

$$\sqrt{x - y} \leq 2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x - y \leq 4.$$

Но из-за наличия $\sqrt{x - y - 4}$ во втором уравнении (12.27), необходимо $x - y \geq 4$, что оставляет единственно возможный выход из положения: $x - y = 4$. В комплекте с $x + y = 2$ (что остаётся от второго уравнения) — это даёт решение $\boxed{x = 3, y = -1}$.

Поэтому, прежде чем хвататься за молоток, начинать надо с предварительного осмотра задачи, будь то система уравнений или другая абракадабра. Скажем,

$$\begin{cases} x - y = \lg \frac{y}{x}, \\ * \cdots * = *. \end{cases} \quad (12.28)$$


Каково второе уравнение, роли не играет. Перепишем первое — в виде

$$x + \lg x = y + \lg y,$$

откуда сразу ясно¹¹⁾: $x = y$, что после подстановки во второе уравнение даёт уравнение с одной неизвестной.

¹¹⁾ Поскольку функция $f(x) = x + \lg x$ строго монотонно возрастает.

Представьте, что кто-то «схватился за молоток» и стал трансцендентную первую строчку (12.28) запутывать дальше.

Успеху может противодействовать и потеря психологического равновесия. Например,

$$\begin{cases} 5^x = 9 + 4^x, \\ y^2 - \sqrt{x-2} + 1 = 0. \end{cases} \quad (12.29)$$

Решение первого уравнения $x = 2$ само просится в руки, но при $x = 2$ у второго — нет решения. Но у первого — могут быть другие решения. И тогда почва уходит из под ног. Или всё-таки нет? Нет, потому что 5^x растёт быстрее $9 + 4^x$ и графики $y = 5^x$ и $y = 9 + 4^x$ могут пересекаться не более чем в одной точке. Кто ещё не освоился со скоростями роста (производными), может перевести уравнение в более удобоваримую форму $\left(\frac{5}{4}\right)^x = \frac{9}{4^x} + 1$. Здесь единственность решения более очевидна, поскольку левая функция $\left(\frac{5}{4}\right)^x$ растёт, правая $\frac{9}{4^x} + 1$ — убывает. Короче говоря, система (12.29) решения не имеет.

Заморочек приведённого типа может быть миллион. Поэтому обезопасить себя на все случаи жизни, перебрав дочиства варианты, — невозможно. Правда, это и не нужно. Проблема здесь главным образом психологическая. Необходимо пройти сквозь огонь, воду и сотню другую задач, добившись в результате спокойствия и уверенности, что сие дело вам по плечу. Просматривать задачи с решениями, конечно, не возбраняется и даже приветствуется, но психологический рост достигается в основном за счёт самостоятельного решения, чего многие избегают. И в этом корень проблемы.

12.8 Использование симметрии

Симметрию можно использовать на профессиональном и на любительском уровне. Любительская эксплуатация симметрии ничего не требует кроме здравого смысла, и потому внедряется в задачи без предупреждения. Простой вопрос: *при каком значении μ система уравнений*



$$\begin{cases} x + y + z = \mu, \\ z^2 - xy = -2 \end{cases} \quad (12.30)$$

имеет единственное решение?

Поскольку x, y входят в (12.30) симметрично (равноправно)¹²⁾, то любому решению $\{x^*, y^*, z^*\}$ в случае $x^* \neq y^*$ отвечало бы второе решение $\{y^*, x^*, z^*\}$. Поэтому, коль требуется единственное решение (12.30), сразу можно положить $x = y$, в результате чего система (12.30) скукоживается до

$$2x + z = \mu, \quad z^2 - x^2 = -2.$$

Подставляя $z = \mu - 2x$ из первого уравнения во второе, получаем квадратное уравнение относительно x . Чтобы оно имело единственное решение необходимо и достаточно равенство нулю дискриминанта, $D = 0$. Из $D = 0$ найдём μ . Всё.

Соображения симметрии могут быть лакмусовой бумажкой для контроля решения. Например, выясняя, что это за такая *арифметическая прогрессия*, у которой $a_n = m$, $a_m = n$, решаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1)d = m, \\ a_m = a_1 + (m-1)d = n, \end{cases} \quad (12.31)$$

и получаем ответ:

$$a_1 = n + m - 1, \quad d = -1.$$

Несимметричный ответ по n, m , типа $a_1 = n - m - 1$, — мы бы сразу отвергли. Поскольку система (12.31) симметрична по n, m и имеет единственное решение.

Профессиональное использование инструмента симметрии в данном контексте начинается с рассмотрения симметричных многочленов. Многочлен $P(x, y)$ называют симметричным, если $P(x, y) = P(y, x)$ при любых x, y . Симметричны многочлены

$$x + y, \quad xy, \quad 3x^2y + 3xy^2, \quad x^4 + y^4, \quad x + y - 5xy.$$

Несимметричны:

$$x - y, \quad xy^3, \quad 3x^2y + 2xy^2, \quad x^4 + y^2.$$

¹²⁾ Если в (12.30) x и y поменять местами — ничего не изменится.

Теория здесь довольно обширна, и мы не собираемся ей заниматься. Но дать намёк имеет смысл, поскольку в учении необходимо ощущение перспективы, уходящей за горизонт¹³⁾. Итак, прямо на старте теория сталкивается с простым, но весьма неожиданным фактом. Любой симметричный многочлен $P(x, y)$, оказывается, может быть выражен через простейшие многочлены:

$$\sigma_1 = x + y, \quad \sigma_2 = xy.$$

Например,



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \\ x^3 + y^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2, \\ x^4 + y^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2, \end{cases} \quad (12.32)$$

причём существует несложный алгоритм последовательного получения формул для любого $x^n + y^n$.

При этом понятно, что, скажем, система

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x^4 + y^4 = b \end{cases} \quad (12.33)$$



мгновенно сводится к решению квадратного уравнения относительно σ_2 , с последующим подключением уравнения $\sigma_1 = a$. Тогда как бесхитростная попытка решения (12.33), типа подстановки $y = a - x$ во второе уравнение, чревата головной болью.

Интересно, что на этой основе можно эффективно решать уравнения с радикалами. Вот «простой» пример.

$$\sqrt[4]{x-6} + \sqrt[4]{40-x} = 2.$$

Первый радикал обозначаем через u , второй — через v . Приходим к частному случаю системы (12.33),



$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x^4 + y^4 = 34. \end{cases}$$

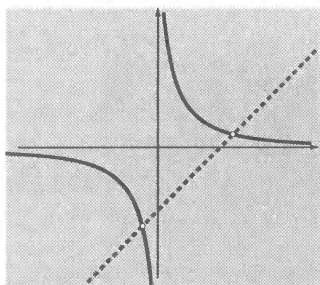
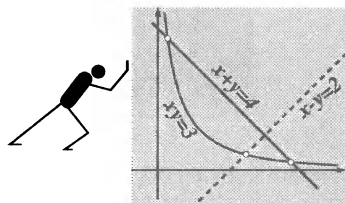
Дальнейшее — дело техники.

¹³⁾ А если вокруг бетонная стена или безжизненный вакуум — охота учиться пропадает.

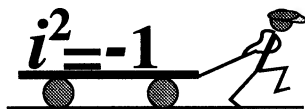
12.9 Опора на графическое представление

И в математике, и в жизни часто бывает так, что стоит информации, хранящейся «на разных полках», прийти в соприкосновение, как многое сразу освещается. Мало кто, решая системы уравнений, думает о графическом представлении фигурирующих соотношений.

Простая иллюстрация — пример (12.24). На графике $xy = 3$ — это гипербола, $x + y = 4$ — прямая. Та и другая изображены толстыми линиями. Две точки пересечения — два решения: $\{1, 3\}$, $\{3, 1\}$.



А если вместо $x + y = 4$ будет $x - y = 2$? Соответствующая прямая на графике выше изображена жирным пунктиром. Но решение не единственно. Здесь необходимо вспомнить, что у гиперболы $xy = 3$ две ветви, рис. слева, решений снова два.

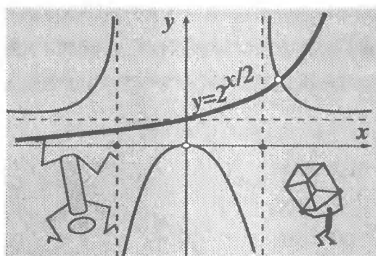


Конечно, графики тут — сбоку бантик. Но в более сложных ситуациях могут быть спасением. Например, система

$$\begin{cases} 2y = x^2(1 - y), \\ \log_2 y = \frac{x}{2} \end{cases} \quad (12.34)$$

в графическом изображении проясняется. Первое уравнение (12.34),

переписанное в виде $y = \frac{x^2}{x^2 - 2}$ даёт график, см. раздел 10.4,

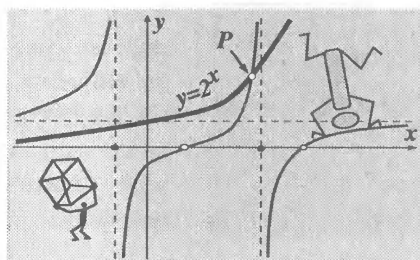


(12.35)

наложение на который кривой $\log_2 y = \frac{x}{2}$, т. е. $y = 2^{x/2}$, показывает, что решение единственно, и оно легко находится, $x = y = 2$.

Аналогичная картинка возникает и в более общей ситуации

$$\begin{cases} y = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}, \\ y = 2^x \end{cases}$$



(12.36)

но изменение второго уравнения (12.36) на $y = 2^{-x}$ приводит к трём решениям, что геометрически очевидно. (?)



Глава 13

Неравенства

*Жизнь под предлогом оптимизации
маскирует непонимание сути.*

13.1 Основные свойства

Свойства неравенств, похоже, заложены в подкорке — и огород можно было бы вообще не городить. Мол, все всё и так знают. Но дабы никому не показалось, что в омуте очевидного присутствует что-либо неведомое, лучше исходные положения перечислить.

$$a > b \Leftrightarrow b < a \quad (13.1)$$

$$a > b, \quad b > c \Rightarrow a > c \quad (13.2)$$

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c \quad (13.3)$$

$$a > b \Rightarrow \begin{cases} \gamma a > \gamma b, & \text{если } \gamma > 0, \\ \gamma a < \gamma b, & \text{если } \gamma < 0 \end{cases} \quad (13.4)$$

К оговоренному нередко добавляют много «лишнего» типа: если $a > b + c$, то $a - c > b$. Но это сразу следует из (13.3): вычитая c из $a > b + c$, получаем $a - c > b$.



13.2 Задачи на доказательство

Источником большинства неравенств является « $x^2 \geq 0$ », как бы вызываяще это ни звучало. Дело в том, что обнажённое « $x^2 \geq 0$ » бывает глубоко закамуфлировано. Вот пока простой пример. Для положительных $x, y > 0$ выполняется неравенство:



$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}. \quad (13.5)$$

Левая часть (13.5) — это *среднее арифметическое* двух чисел, правая — *среднее геометрическое*.

Доказывают (13.5) обычно так: переносим \sqrt{xy} в левую часть (13.5), умножаем на 2, получаем

$$x + y - 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0.$$

Важное замечание. Проведённое рассуждение логически ошибочно. Неравенство (13.5) — исходно то ли верное, то ли нет — сведено к безусловно правильному $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$. Но требуется-то обратное: из правильного вывести (13.5). Поэтому рассуждение надо бы провести в противоположном направлении:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \Rightarrow x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0 \Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Такая канитель едва ли заслуживает подражания¹⁾. Разумный подход состоит в другом. Манипулируя с доказываемым, равенством или неравенством, надо лишь следить, обратимы ли манипуляции. Если все выполняемые действия обратимы и в конце получено верное утверждение — всё доказано²⁾. И переписывать проделанное в обратном порядке нет необходимости. В крайнем случае можно добавить фразу насчёт «обратимости».

¹⁾ Разумеется, если не преследуется цель отпугнуть неугодных от математики. Дескать, у нас тут такие порядки, что вам не по зубам.

²⁾ Ветряные мельницы здесь выглядят так. Доказывая $1 > 2$, добавляем $5 > 3$, получаем верное $6 > 5$. Выполненные действия законны, но $1 \not> 2$.

Пусть имеется $2n$ чисел, a_1, \dots, a_n ; b_1, \dots, b_n , все $b_j \neq 0$. Очевидно,

$$\min_k \left(\frac{a_k}{b_k} \right) \leq \frac{a_j}{b_j} \leq \max_k \left(\frac{a_k}{b_k} \right),$$

что равносильно

$$b_j \min_k \left(\frac{a_k}{b_k} \right) \leq a_j \leq b_j \max_k \left(\frac{a_k}{b_k} \right). \quad (13.6)$$

Суммируя (13.6) по j , получаем

$$(b_1 + \dots + b_n) \min_k \left(\frac{a_k}{b_k} \right) \leq a_1 + \dots + a_n \leq (b_1 + \dots + b_n) \max_k \left(\frac{a_k}{b_k} \right),$$

что после деления на $(b_1 + \dots + b_n)$ даёт полезное неравенство

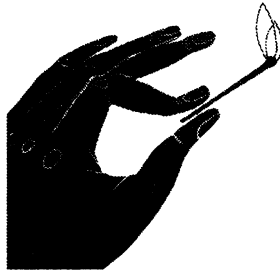
$$\boxed{\min_k \left(\frac{a_k}{b_k} \right) \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{b_1 + \dots + b_n} \leq \max_k \left(\frac{a_k}{b_k} \right)} \quad (13.7)$$

Неравенства (13.5), (13.7) относятся к категории «опорных», узнаваемых, на которых, как на элементах, произрастают различные модификации и более сложные конструкции. В то же время в данной нише встречается масса практически безыдейных задач.

Доказать, скажем, $2a^2 + b^2 \geq 2a(b+1) - 1$. Перепасовка всего влево с последующей группировкой выявляет очевидный эквивалент

$$(a - b)^2 + (a - 1)^2 \geq 0.$$

Ну и как прикажете реагировать? Скучновато, мягко говоря. Но из таких обыденностей состоят серые будни и рядовые тренировки.

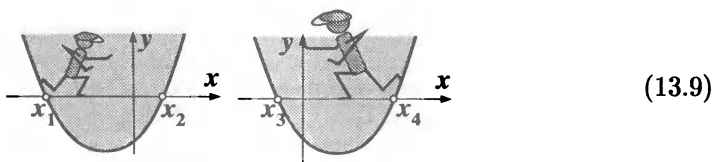


13.3 Решение неравенств

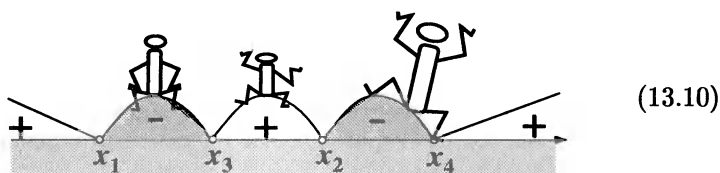
О *решении неравенств* говорят, когда требуется выяснить, при каких значениях переменных выполняется предлагаемое неравенство. Например,

$$\frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d} < 0. \quad (13.8)$$

И числитель, и знаменатель (13.8) — параболы, меняющие знак в точках, где соответствующие многочлены обращаются в ноль³⁾, рис. (13.9). Пусть $x_{1,2}$ — корни числителя, $x_{3,4}$ — знаменателя.



Располагаем все корни на оси иксов, рис. (13.10). В каждой точке x_j меняет знак либо числитель, либо знаменатель, а значит и всё выражение (13.8). Поэтому в промежутках между соседними корнями функция (13.8) знакопостоянна.



Таким образом решением неравенства (13.8) служит

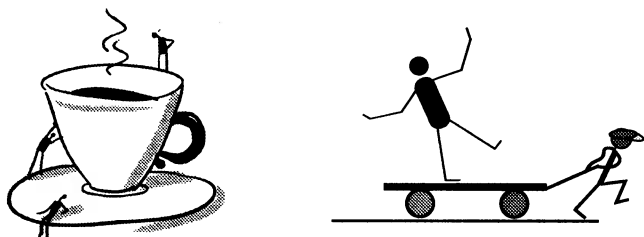
$$x_1 < x < x_3, \quad x_2 < x < x_4,$$

или в эквивалентной записи:

$$x \in (x_1, x_3), \quad x \in (x_2, x_4).$$

³⁾ Разумеется, если корни простые, т. е. не совпадают.

Как бы поменялся ответ, если бы в (13.8) вместо $<$ был знак \leq ? Вот так: $x_1 \leq x < x_3$, $x_2 \leq x < x_4$. Потому что корни числителя присоединились бы, а знаменателю в любом случае обращаться в ноль не разрешается.



Описанное характеризуется обычно как *метод интервалов*. Рецепт удобный, геометрически нагляден и, как правило, легко воспринимается. Возможны, разумеется, вариации. Что если корни числителя совпадают? Или знаменателя? Или в числителе стоит $\lg(x+5)$? Или речь идёт о неравенстве $\frac{3x+2}{2x-3} \geq 0$?

Перечисленные вопросы не стоят выеденного яйца, и если вы именно так думаете, то тема усвоена, и можно двигаться дальше. Но если вам хочется, чтобы по некоторым вопросам были расставлены точки над *i*, — значит, что-то непонятно, и надо вгрызаться в существо дела, чтобы не жить далее с этой занозой.

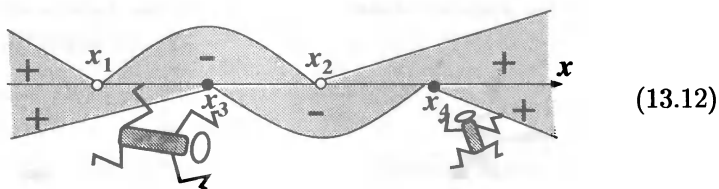
Вообще надо иметь в виду, что тяга к расстановке точек над *i* — почти всегда свидетельствует о непонимании. Человеку хочется получить детальное описание метода, задачи, с тем, чтобы потом разобраться. И эти груды не до конца понятых фактов и поворотов мысли копятся годами. А потом люди так и живут до седых волос с чувством невыученных уроков.

13.4 Территория метода интервалов

Диапазон применимости *метода интервалов* весьма широк, и уж к задачам типа (13.8) далеко не сводится. Можно говорить о системе неравенств, например,

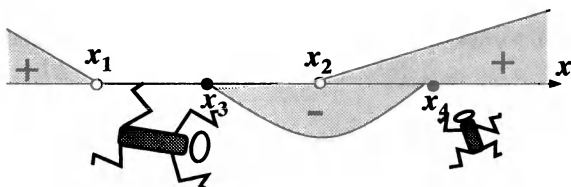
$$\begin{aligned} x^2 + ax + b &\geq 0, \\ x^2 + cx + d &< 0. \end{aligned} \quad (13.11)$$

Интервалы знакопостоянства функции первого неравенства удобно изобразить **над** осью x , второго — **под** осью x , рис. (13.12).



Из рисунка видно, что решением (13.11) служит $x_2 \leq x < x_4$.

Лишние интервалы удобнее даже не рисовать. Оставляя только те участки, на которых удовлетворяются неравенства (13.11),



Здесь увидеть $x_2 \leq x < x_4$ посторонние детали не так мешают.

Вот другая задача,

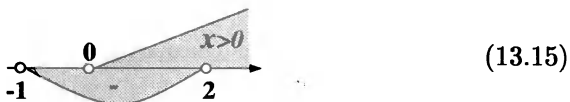
$$\lg x + \lg(x+1) < \lg(2x+2), \quad (13.13)$$

где дополнительно вклиниваются логарифмы, за которыми надо проследить, чтобы все они были определены, для чего аргументы обязаны быть строго положительны. Отсюда $x > 0$. Для первого логарифма это обязательно. Остальные — устраивает с запасом. При условии $x > 0$ имеем право от (13.13) перейти к $\lg x(x+1) < \lg(2x+2)$, далее вспоминаем, что логарифм *монотонно возрастающая* функция⁴⁾, и получаем

$$x(x+1) < 2x+2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0. \quad (13.14)$$

⁴⁾ При основании большем единицы.

Решая квадратное уравнение $x^2 - x - 2 = 0$, находим корни $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Поэтому неравенству (13.14) удовлетворяют $x \in (-1, 2)$, интервал помеченный на рис. (13.15) снизу,

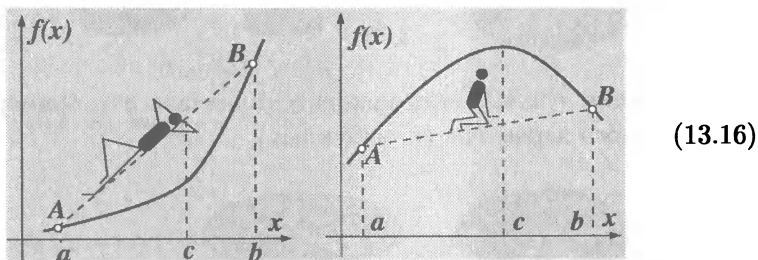


но далее необходимо вспомнить об условии $x > 0$ (интервал помечен сверху). Окончательно $0 < x < 2$.

Принципиальной роли для решённой задачи *метод интервалов*, конечно, не имел. Но он на такую роль и не претендует. *Метод интервалов* предоставляет удобства геометрического виденья ситуации. В простеньких задачах выигрыш не так велик, но он всегда ощутим и часто весьма внушителен.

13.5 Категория мышления — выпуклость

Полезная категория мышления — *выпуклость*. Функцию называют *выпуклой*, когда её график выглядит, как на рис. (13.16) слева, и *вогнутой* — в случае, изображенном на (13.16) справа⁵⁾.



У выпуклой функции вертикальный луч, идущий вверх из любой точки $c \in [a, b]$, пересекает сначала график $f(x)$, потом

⁵⁾ О вогнутой функции говорят также как о *выпуклой вверх*.

отрезок AB , что можно записать как⁶⁾

$$f(\lambda_1 a + \lambda_2 b) \leq \lambda_1 f(a) + \lambda_2 f(b), \quad (13.17)$$

при любых $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, удовлетворяющих условию $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, что принимают обычно за определение *выпуклой функции*.

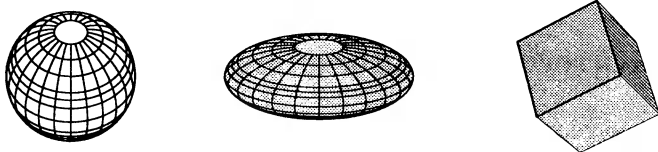
Использование линейных комбинаций вида

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b, \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad -$$

стандартный приём, который часто и широко эксплуатируется. Поэтому с «внутренней механикой» здесь полезно досконально разобраться, хотя по большому счёту всё очень просто. Надо лишь убедиться, что выбором λ_1, λ_2 достигается выбор любой точки⁷⁾ $c = \lambda_1 a + \lambda_2 b \in [a, b]$. Соответственно,

$$\lambda_1 f(a) + \lambda_2 f(b) \in [f(a), f(b)].$$

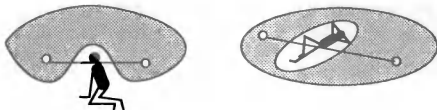
Феномен выпуклости проистекает из геометрии. Геометрическую фигуру называют *выпуклой*, если вместе с любыми двумя точками она содержит отрезок их соединяющий. Примеры выпуклых тел хорошо известны, как объёмные,



так и плоские,



Для понимания духа понятия важнее отталкиваться от примеров отрицательного характера (невыпуклых)



⁶⁾ У *вогнутой функции* наоборот, вертикальный луч, идущий вверх, пересекает сначала AB , потом график $f(x)$. Этому соответствует условие (13.17) с обратным знаком неравенства, \leq меняется на \geq .

⁷⁾ Иначе говоря, $\lambda a + (1 - \lambda)b$ при $\lambda \in [0, 1]$ описывает отрезок $[a, b]$.

Функцию обычно считают выпуклой, если она имеет выпуклый *надграфик*, представляющий собой множество точек (x, y) , удовлетворяющих неравенству $y \geq f(x)$.

Для тех, кто уже знаком с понятием производной, имеет смысл напомнить, что у выпуклой функции $f(x)$ производная $f'(x)$ монотонно возрастает, т. е. вторая производная $f''(x) \geq 0$.

13.6 Неравенство Иенсена*

Выпуклость/вогнутость функции влечёт за собой полезные неравенства. Одно из них — *неравенство Иенсена*.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ вогнута на $[a, b]$, т. е.

$$\boxed{f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)}, \quad (13.18)$$

для любых x_1, x_2 на $[a, b]$, и $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Тогда для любых x_1, x_2, \dots, x_n на $[a, b]$ при условии

$$\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0; \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$$

имеет место неравенство



$$\boxed{f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)}, \quad (13.19)$$

◀ Допустим, (13.19) верно для $n = k$. Для перехода к $n = k + 1$ заменим сумму двух слагаемых $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ одним слагаемым

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x_2 \right).$$

Далее легко получаем

$$\begin{aligned} & f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{k+1} x_{k+1}) = \\ & = f \left((\lambda_1 + \lambda_2) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x_2 \right) + \lambda_3 x_3 + \dots + \lambda_{k+1} x_{k+1} \right) \geq \\ & \geq (\lambda_1 + \lambda_2) f \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x_2 \right) + \lambda_3 f(x_3) + \dots + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \geq \\ & \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3) + \dots + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \end{aligned}$$

Справедливость (13.19) для $n = 2$ оговорена в условии, возможность индуктивного перехода доказана, истинность (13.19) установлена. ►

По ходу дела мы столкнулись с **методом математической индукции**, который широко применяется для доказательства различных утверждений. Его схема довольно проста. Допустим, необходимо доказать справедливость некоторого утверждения $A(n)$ при любом натуральном n . Тогда — первое. Проверяем справедливость $A(1)$. Второе. Доказываем возможность индуктивного перехода⁸⁾:



$$\text{Если } A(n) \text{ верно, то верно и } A(n+1). \quad (13.20)$$

Скажем, если $A(n)$ это « $n^2 > 0$ », т. е. утверждение «квадрат натурального n больше нуля», то доказательство выглядит так. ◀ Во-первых, $1^2 > 0$. Во-вторых, если $n^2 > 0$ при некотором n , то $(n+1)^2 > 0$, потому что

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > 0$$

как сумма трёх положительных слагаемых. Первое — положительно, $n^2 > 0$, по индуктивному предположению. ► Конечно, ситуация проста «до идиотизма». Более интересные задачи см. на сайте oschool.ru.

Вернёмся к *теореме : если* (13.18), *то* (13.19). Поскольку (13.18) выступает здесь в роли эквивалента вогнутости $f(x)$, тот же результат можно выразить проще: *для вогнутой функции $f(x)$ имеет место неравенство (13.19)*.

Примером вогнутой функции является $\lg x$. Выписывая для неё неравенство (13.19) в случае $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, имеем (все $x_j \geq 0$)

$$\lg \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \frac{\lg x_1 + \dots + \lg x_n}{n} = \lg \sqrt[n]{x_1 \dots x_n},$$

откуда получаем общее неравенство «*среднее арифметическое больше среднего геометрического*»

$$\boxed{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}.} \quad (13.21)$$

⁸⁾ Что выше и было сделано.

13.7 Искусство замечать следы

Секреты маскировки идей представляют на первый взгляд больший интерес для составителей задач, чем для тех, кто их решает. Но это ещё как сказать. Знание трюков «противника» меняет картину сражения.

Многие неравенства возникают как частные случаи общеизвестных фактов. Подстановка, например, $x_k = \frac{1}{k}$ в (13.21) даёт

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{n!}},$$

или в другой записи



$$\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)^n \geq \frac{n^n}{n!},$$

в которой источник (13.21) не сразу угадывается.

Другой вариант. Полагая $x_k = k$ в (13.21), имеем

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \geq \sqrt[n]{n!}.$$

Дабы получше спрятать концы в воду, можно использовать ещё $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. В результате (13.21) приобретает трудно узнаваемую форму

$$\frac{n+1}{2} \geq \sqrt[n]{n!} \quad (13.22)$$

Вот так простые фокусы заставляют *яблоко далеко упасть от яблони*. Претерпев существенные изменения, классическое неравенство (13.21) обрело другой облик (13.22), и путь обратно к (13.21) найти нелегко⁹⁾.

⁹⁾ Впрочем, поиск «обратного пути» здесь не имеет особого смысла, поскольку неравенство (13.22) и так легко доказывается, ибо выполняется с большим запасом. Сравнивая, что больше, толщина хромосомы или диаметр Земли, нет необходимости пользоваться микрометром.

Глава 14

Текстовые задачи

*В Поднебесной нет задач,
есть только паруса фантазий.*

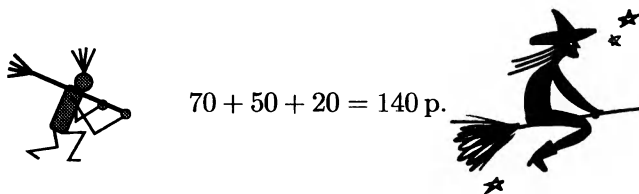
14.1 В чём главная трудность

Текстовыми называют описанные словесно содержательные задачи, которые требуется математически формализовать и решить. В итоге это приводит обычно к тем или иным уравнениям, и потому сии головоломки называют также «задачами на составление уравнений».

Соответствующая тематика считается очень трудной, что выглядит загадочно. Потому что задним числом, когда задача уже решена, видно, что проблема не стоила выеденного яйца, но отняла столько нервов, что впору задуматься о мистике. Ничего сверхъестественного тем не менее здесь нет. Проблема в другом. В умении *адекватно воспринимать действительность*, чего на белом свете недостаёт. Вот простая иллюстрация.

В Интернете многие ломают голову над задачей «куда делась десятка». В нашем варианте: *Баба-Яга* заняла у *Кощея* 100 р., но потеряла их. Тогда она заняла 50 р. у *Красной Шапочки*, купила себе метлу за 20 р., оставшиеся 30 р. вернула Кощею. В итоге: Кощею Яга осталась должна $100 - 30 = 70$ р., *Красной Шапочке* —

50 р., ну и 20 р. были уплачены за метлу. Получается:



$$70 + 50 + 20 = 140 \text{ р.} \quad (14.1)$$

Но заняла-то она в сумме 150 р. Куда же делась десятка?

Не хочется даже комментировать. Потому что в огороде — бузина, в Киеве — дядька. Однако некоторые думают, что у них плохи дела с математикой, ибо «десятка» их ставит в тупик. Но **математика здесь ни при чём!** Если возникают осложнения, то они проистекают из-за каши в голове. В (14.1) «смешались в кучу кони, люди...». С какой стати в (14.1) долги суммируются со стоимостью метлы? Если анализ не даётся, посмотрите видеолекцию¹⁾, там обсуждаются и другие задачи из той же оперы.

Короче говоря, *самое сложное в математике — её нематематическая часть*. Труднейшее звено пути здесь — тропинка из окружающего мира в математику. Если задача описана содержательно, то её необходимо отчётливо воспринять, выделить главное, отсеять лишнее. Для этого требуется трезвый взгляд, уверенность, дисциплина ума. Поэтому абстрагирование, формализация — это 90% успеха. Решение потом — дело техники.

14.2 Задачи на составление уравнений

Требуется ли *умение составлять уравнения*, чтобы пройти путь от эмбриона хотя бы до главного бухгалтера? — Обязательно! Хотя кому-то источник потребности видится в другом. Родители, мол, настаивают. Не будем спорить. Одно другому не мешает. Но мы сконцентрируемся на главном.

Дело в том, что род людской испокон веку только и занимается *составлением и решением уравнений*. Нижняя точка диапазона хорошо известна. Идёт Вовочка в магазин за конфетами.

¹⁾ «Проценты — будь они неладны» — oschool.ru

Цена — λ , денег в кармане — c . Хватит, допустим, на x грамм, — рассуждает будущий главбух. Тогда

$$\lambda \cdot x = c.$$



Далее не надо быть семи пядей во лбу, чтобы найти: $x = c/\lambda$.

Все подобные «штучки» возникают в рамках обычных схем рассуждений, применяемых как официантами, так и научными организациями. Неизвестное как-то обозначается, после чего начинается стандартное «колдовство» типа: если к x прибавить трам-тара-рам, а потом умножить само на себя и вычесть трах-тара-рах, должно получится бух-тиби-дох. В результате петля умозаключения замыкается, а поскольку что-то с чем-то складывается, на что-то умножается и бух-тиби-доху приравнивается, получается уравнение, и задача сводится к его решению.

Универсальность такого подхода проистекает из того, что мир стоит на *законах сохранения*, на равенствах, на возможности посчитать одно и то же различными способами. *«Если в одном месте чего-то ubyло, то в другом — столько же прибыло»*. Когда тело падает с высоты h , потенциальная энергия mgh переходит в кинетическую $\frac{mv^2}{2}$, и по закону сохранения энергии



$$\frac{mv^2}{2} = mgh. \quad (14.2)$$

Рассматривая (14.2) как уравнение относительно v , получаем скорость в конце падения, $v = \sqrt{2gh}$.

Иногда «икс», застолбивший для себя роль неизвестного, мешает понять, что физика всё время решает задачи на составление и решение уравнений. Откройте глаза, и вы можете удивиться. Просто неизвестные в процессе решения обозначаются другими буквами. Например, «сила равна массе на ускорение». Силу измеряем²⁾, а массу или ускорение, в зависимости от обстоятельств, принимаем за неизвестное и определяем из уравнения $ma = F$.

²⁾ Либо определяем как равнодействующую других сил.

14.3 Обыденные задачи

Тренироваться, конечно, надо на рядовых задачах. Но промахиваясь и попадая в десятку, каждый раз необходимо извлекать урок. Потому что дело не в самих задачах, а в примеси общих идей, присущих «текстовой» проблематике, которые и надо вылавливать. Перейдём, однако, к примерам.

Задача 1. Время в пути катера из A в B, вниз по реке (по течению), а потом обратно — равно T. Путь из A в B равен S, скорость течения v. Чему равна собственная скорость катера x?

◀ Очевидно,

$$\frac{S}{x+v} + \frac{S}{x-v} = T. \quad (14.3)$$

Умножая (14.3) на $(x+v)(x-v)$ приходим к квадратному уравнению. Дальнейшее — дело техники. ►

Задача не бог весть какая, однако более-менее естественная. Сформулирована, правда, как бы для игры в поддавки. Многое обособлено, обозначено — прямо-таки подготовлено, чтобы рот открыть и проглотить. А в обычных формулировках всё бывает перепутано, замаскировано — и приходится самому расставлять по полочкам, давать имена (обозначения). Наведение порядка подобного рода кажется делом нехитрым. Но это до тех пор, пока не сталкиваешься с чем-то вроде следующего перла.

Задача. Маша в день рождения напекла пирожков. В гости пришли два привидения, три поросёнка и волк. Поросята съели по пирожку, волк съел поросёнка, и стал приставать к привидениям. Те вызвали полицию. Та пришла и досла 25 оставшихся пирожков. Сколько пирожков было вначале? Ах да, забыли сказать: Маше исполнилось 7 лет, а дом трёхэтажный.*

Как сие, доведённое до абсурда, оценить? Может ли в задаче играть какую-то роль лишняя информация и примесь бреда? Может. Именно в такой обстановке приходится в жизни *извлекать суть из хаоса*. Отсекать несущественное, выявлять связи, взаимодействие причин. Другое дело, что начинать задачи пу-
стыками надо так, чтобы не было скучно или даже неприятно.

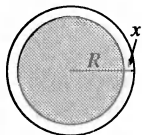
Короче говоря, школьные задачи на составление уравнений включают два ингредиента. Собственно — *составление*, и это чрезвычайно важная составляющая, хотя и не математическая. Другой ингредиент — решение уравнений — второстепенный, его можно даже опускать. Вывел уравнение — всё! Главное сделано. Акцент на первой фазе повысит эффективность тренинга и откроет двери к жизненному успеху в других сферах. Ибо умение укладывать запутанные ситуации в прокрустово ложе здравого смысла — это как раз то, чего в мире не хватает.

Так что *составление уравнений — это не математика. Это искусство постановки задач, моделирование*. Очень сложная сфера деятельности. Выделить главное, отсеять лишнее, разобраться в хитросплетениях — вот чем тут занимаются. И соответствующие способности всегда в почёте. Почему, думаете, любят *Шерлока Холмса* и вообще проникательных сыщиков? То-то и оно. Человек, умеющий раздраконить ситуацию, повернуть её таким боком, что всё становится на свои места, разгадать игру, мотивы, обнажить скелет — такой человек вызывает восхищение, а судьба продвигает его в дамки.

14.4 Примеры

Если заметили, мы говорили пока о важных вещах, не выходя особо за рамки простого уравнения $ax = b$. Ибо главное не в самих уравнениях, а в путях к ним. Но бывает, что задачу целесообразно довести до конца.

Задача 2. Землю вдоль экватора опоясали верёвкой. Осталось лишних 10 метров. Верёвку расправили так, чтобы образовалась концентрическая окружность. Каков зазор между Землей и верёвкой?



$$\text{Очевидно, } 2\pi(R + x) - 2\pi R = 10 \Rightarrow 2\pi x = 10 \Rightarrow x = \frac{5}{\pi}. \quad (!)$$

Зазор получается больше полутора метров! Тогда как интуиция думает о микронах. Ибо что такое 10 метров относительно длины экватора. Это, конечно, побочный результат в данном контексте. Но он повышает интерес к задаче, что немаловажно. Кроме того, вторичные

факторы сильнее воздействуют на формирование психологии человека. Из-за того что первичные — перехватывает разум, и жонглирует ими, не пропуская в подсознание.

Как видите, с этапом трансформации задачи из содержательной в математическую мы особо не нянькаемся. Тут какие-то элементы проносятся быстрее мысли, а какие-то — душу вынимают своей медлительностью и неуклюжестью. Так что эта кухня для текстового изложения не подходит. Поэтому с ней лучше знакомиться либо в видеоформате, либо в диалоге с внутренним голосом.

Задача 3. Продавец, надеясь в перспективе избежать ада и зная о неравноплечности рычажных весов, отпускал товар, ставя свою единственную гирию веса P попеременно то на левую чашу весов, то на правую. Кто в проигрыше?

Типичная содержательная задача, нуждающаяся в формализации. Да и в уточнении, пожалуй. Итак, пусть плечи будут

x и y .  Тогда гирия P в одном случае урав-

новесит вес A , определяемый равенством $Ay = Px$, в другом — вес B , определяемый из $Bx = Py$. Поэтому

$$A + B = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) P.$$

Но так как $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$ при $x \neq y$ (?), вес $A + B$ строго больше ожидаемых $2P$ — продавец в проигрыше.

Задача 4. Найти сумму $S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$.

Мы тут возвращаемся к определению суммы геометрической прогрессии, заостряя внимание не на формуле (общеизвестной), а на методе, который может быть использован более широко. В задаче никто не просит составлять какое-либо уравнение. Да и какое? Но мы сами продолжаем рассуждение и задаёмся вопросом определения S_{n+1} двумя разными способами. И это уже приводит к уравнению относительно S_n ,

$$S_{n+1} = S_n + x^{n+1} = xS_n + 1,$$

откуда сразу получается $S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, см. раздел 11.3.

Обратим внимание, что *метод вычисления величин двумя разными способами* является краеугольным принципом изучения Вселенной. Вся физика на том стоит. И математики упускают из виду, что физика — это конгломерат текстовых задач. Упускают из виду потому, что там эти задачи надо маленько «докрутить», чтобы потребность в составлении уравнений проступила явно. Примерно так мы «докрутили» задачу 4.

Задача 5. Джон Пипеткин из А в В шёл со скоростью 5 км/час. Обратню решил ехать на велосипеде, причём с такой скоростью x , чтобы средняя скорость его путешествия туда и обратно бала равна³⁾ 15 км/час. Найти x .

Данных под рукой вроде бы маловато, но будем надеяться, что в конечном итоге они не понадобятся. Однако при составлении уравнения удобно использовать длину пути S из А в В. Время в пути, туда и обратно, очевидно, равно $t = \frac{S}{5} + \frac{S}{x}$. Средняя скорость:

$$\frac{2S}{t} = \frac{2S}{\frac{S}{5} + \frac{S}{x}} = 15. \quad (14.4)$$

Путь S в (14.4) действительно сокращается, и остаётся уравнение относительно x . Но оно приводит к отрицательному решению $x < 0$! Ехать на велосипеде надо с отрицательной скоростью. Конфуз. В чём дело?

Дело в том, что, потратив время $S/5$ на движение пешком, среднюю скорость «туда и обратно» уже невозможно сделать сколь угодно большой, даже возвращаясь в А на самолёте. Возьмите $x = \infty$, чему скорость $2S/t$ в (14.4) будет равна? — 10 км/час. А мы хотим 15 км/час. Нонсенс!

Задача 6. Собственная скорость моторной лодки (в спокойной воде) равна x км/час. Ставится два эксперимента. В первом — лодка проходит 1 км против течения реки (скорость течения 3 км/час), во втором — лодка проходит $(4-x)$ км также против течения. В обоих случаях измеряется время движения лодки. Если фора по времени равна T , то при какой скорости x результаты будут одинаковы?

Задача дурацкая, надо признать, но это выясняется не сразу. Условие несколько надуманное, но на безрыбье и не такие сюжеты закручиваются. Итак, времена движения лодки $\frac{1}{x-3}$ и $\frac{4-x}{x-3}$. Гандикап T прибавляем к любому из них (не фиксируя знак), получая уравнение

$$\frac{1}{x-3} + T = \frac{4-x}{x-3}. \quad (14.5)$$

Всё переносим влево, приводим к общему знаменателю, имеем:

$$\frac{(T+1)(x-3)}{x-3} = 0. \quad (14.6)$$

Числитель обращается в ноль при $x=3$, но такое решение не годится. Знаменатель обращается в ноль, да и лодка будет стоять на месте. А вот гандикап $T = -1$ обеспечивает одинаковые результаты при любой скорости x , разумеется, кроме $x=3$.

Так что при попадании в аномалию надо держать удар.

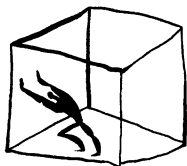
14.5 Правильные многогранники

Территория $ax = b$, безусловно узкая⁴⁾, и отличники могут загрустить. Дескать, где желанное ощущение полета орла? Где небо в алмазах? Ведь Богом задумано, чтобы его постоянно было видно. А где оно? Один только потолок, мухи, паутина. То живот болит, то каникул не дождешься. Да ещё это ненавистное « $ax = b$ » — вот вам, господа отличники, задача космического масштаба.

Найдём все правильные многогранники. *Правильный многогранник* обладает тем свойством, что в каждой вершине сходится одно и то же число K рёбер, и одно и то же число N рёбер ограничивает каждую грань.

⁴⁾ Хотя законы Ома, Ньютона и др. располагаются именно здесь.

Можем ли мы связать K и N какими-либо уравнениями? Можем. Но для этого *приходится вводить в рассмотрение другие сущности*⁵⁾. В данном случае, V , R , G , где V обозначает *общее число вершин*, R — *рёбер*, G — *граней* многогранника. Легко сообразить, что



$$N \cdot G = 2R, \quad K \cdot V = 2R, \quad (14.7)$$

но тут всего два уравнения и пять неизвестных. Маловато. Ещё можно вспомнить *формулу Эйлера*⁶⁾ $V - R + G = 2$. Всё равно вроде маловато. Но спасает условие целочисленности решения. Подставляя V и G из (14.7) в $V - R + G = 2$, получаем уравнение

$$\left(\frac{2}{K} - 1 + \frac{2}{N} \right) R = 2,$$

которое легко решается прямым перебором, ограниченным целочисленностью переменных и естественными неравенствами

$$\frac{2}{K} + \frac{2}{N} > 1, \quad K, N > 2.$$

Вот все возможные решения:

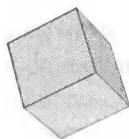
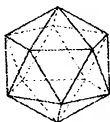
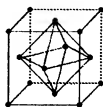
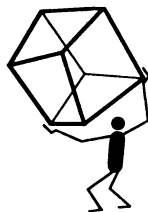
$K = 3, \quad N = 3, \quad G = 4$ — *тетраэдр*,

$K = 3, \quad N = 4, \quad G = 6$ — *куб*,

$K = 3, \quad N = 5, \quad G = 12$ — *додекаэдр*,

$K = 4, \quad N = 3, \quad G = 8$ — *октаэдр*,

$K = 5, \quad N = 3, \quad G = 20$ — *икосаэдр*.



⁵⁾ Это фундаментальная особенность изучения мироздания. При столкновении с какими-то частностями необходимо посмотреть, в какую более-менее автономную группу явлений/сущностей они погружены. Решая, скажем, вопрос «жениться или не жениться», полезно взглянуть повнимательнее не только на свою Дульцинею, но и на её маму.

⁶⁾ Формула Эйлера легко доказывается методом математической индукции, см. на сайте oschool.ru — используйте поиск.

Глава 15

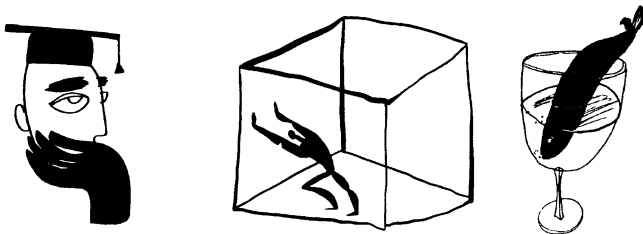
Факультатив

*Болезнь так вплетена в прозу жизни,
что неотличима от здоровой ткани.*

15.1 Существует ли бесконечность

Бесконечна ли Вселенная, и если — да, то «этого не может быть». А если — нет, то что там по ту сторону? А кто любит сказки насчёт ограниченных многообразий без края, типа сферы — пусть мысль пошлёт перпендикулярно краю. Что там? Или кто.

Получается и так плохо и эдак. И это испепеляющее жжение пространственной вечности шокирует вплоть до второго класса, пока проблемы Поднебесной воспринимаются нутром, а не умом. Потом пронизывающий зов «неисчерпаемости» глохнет, и обжигаясь о реальность, человек прячется в выдуманном мире.



Спрятаться хорошо всё равно не удаётся. В мире идей бесконечность является в другом облике. В каком смысле существует

натуральный ряд

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\} \quad (15.1)$$

Как разворачивающийся процесс или как завершившийся? Числа из \mathbb{N} потенциально можно построить или они уже есть в наличии? Поначалу проблема отдаёт схоластикой. Не все ли равно, казалось бы. Последствий-то никаких.

Последствия тем не менее грандиозные. В альтернативе получаются две разные математики. Одна — конструктивная, не допускающая осуществления бесконечности во всей её необъятности. Другая — обычная, всяядная.

Мелкие неприятности от присутствия бесконечности возникают уже в элементарных ситуациях типа



$$1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$$

$$1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots,$$

где наличие взаимно однозначного соответствия $\begin{matrix} n \\ \updownarrow \\ n^2 \end{matrix}$ подталки-

вает к мысли, что целых чисел столько же, сколько их квадратов. Пример давно набил оскомину, но он в простейшей форме отражает наличие проблемы. Получается ведь, если Некто забирает у меня каждый день 10 рублей, а отдаёт — один, то, когда процесс закончится, мы будем квиты. Ибо, если ряд \mathbb{N} уже состоялся, n -й рубль мне был отдан в n -й день. Парадокс, конечно, не стоит выеденного яйца, потому что процесс никогда закончится, — думает пятиклассник. Недаром \mathbb{N} даже записать невозможно. Многоточие в (15.1) ведь от бессилия. Поскольку \mathbb{N} бесконечен в том смысле, что какое n ни возьмёшь — можно указать большее.

А как быть с дробями $\frac{p}{q}$, $p < q$? Они *все уже есть* на отрезке $[0, 1]$. Они тут, их не надо добавлять одну за другой. Так

что $[0, 1]$ — *ловушка конечного размера для бесконечности*. Маленький кошелек, куда помещаются все дроби. А $\sqrt{2}$, как состоявшаяся бесконечность, из-за бесконечности десятичной дроби. Поэтому у теории множеств есть все основания рассматривать бесконечность как **данность**. Другое дело что к этой данности предъявляются определённые требования, дабы не возникало противоречий. Но это пока у нас за рамками рассмотрения.



Как только что-либо признаёшь, начинаются хлопоты. Бесконечностей рой, и с ними надо как-то управляться. Этим занялся *Георг Кантор*¹⁾, создавший *теорию множеств*. Случившаяся революция подтверждает известный тезис «истина рождается как ересь и умирает как банальность». Главные идеи сегодня доступны всем²⁾. А «тогда» невозможно было объяснить никому. Сейчас-то болезнь укоренилась, недоумение иссякло.

В основу изучения множеств *Кантор* положил инструмент взаимно однозначного соответствия. *Множества X , Y эквивалентны, $X \sim Y$, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.*

Отношение « \sim », поскольку *рефлексивно* и *транзитивно*³⁾, позволяет разбить все множества на *классы эквивалентности*⁴⁾. Класс эквивалентности X называют его **мощностью**, и обозначают как $|X|$. Множества упорядочиваются по мощности с помощью следующего трюка.

Множество X меньше Y по мощности, пишем $|X| < |Y|$, если взаимно однозначное соответствие между X меньше Y отсутствует, но существует между X и некоторым подмножеством $Z \subset Y$.

¹⁾ Родился 3.03.1845 в России, умер 6.06.1918 в Германии.

²⁾ Если не углубляться. В Мире ничего нельзя объяснить исчерпывающе. Как только начинаешь «всматриваться», объект располагается.

³⁾ Т. е. $X \sim Y \Leftrightarrow Y \sim X$ и $X \sim Y, Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$.

⁴⁾ На семейства эквивалентных множеств.

при условии $\beta_j \neq \gamma_{jj}$ для всех j — не входит в список (15.3), что даёт противоречие⁵⁾.

Особенно болезненной была историческая попытка установить, что отрезок $[0, 1]$ и квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ имеют разные *мощности*. Оказалось — *одинаковые*. Такой встряски мир не получал со времен *Галилея*, когда обнаружилось, что все тела падают с одинаковым ускорением.

Доказательство. Точкам квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ с координатами

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots, \quad y = 0, \beta_1 \beta_2 \dots$$

достаточно сопоставить точки отрезка $[0, 1]$

$$z = 0, \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \dots, \quad \text{и наоборот.}$$



Вот и все доказательство⁶⁾. На эти две строчки у *Кантора* ушло *три года*! Круги по воде расходились ещё дальше. Истина «рождалась как ересь» и «торжествовала по мере вымирания противников».

Как бы там ни было, бесконечность завоевала место под солнцем. Без неё в математике всё «стояло бы на месте». Да оно и стоит — в конструктивной математике, куда не помещается — обыкновенная. Равенства и неравенства конструктивных чисел чаще всего не проверяются, последовательностям некуда сходиться, пределы не существуют, непрерывность только снится, и вообще всё рушится. Жуткая картина. Степень катастрофы даже трудно оценить. Поэтому *бесконечность* почти так же полезна как *единица*. Другая сторона медали, как бы. Эдакое вместо того, «чего не бывает».

⁵⁾ Чтобы обойти стороной проблему неоднозначной записи десятичной дроби, достаточно выбирать β_j не равными 0 и 9.

⁶⁾ На самом деле здесь необходимы уточнения в связи с неоднозначностью десятичной записи чисел. Но мы на этом не останавливаемся.

15.2 Когда помогает бесконечность

Проблема бесконечности — проста, как выстрел из пистолета, но в ней отражается тайна Вселенной. Игнорировать невыносимо, постичь невозможно. Что же до моделей типа замкнутого пространства — то они не спасают. Ибо «во что» погружена модель? И как устроен Мир, и Кто его создал, и как сумел? И кто создал Того, кто создал Мир?

Это про мироздание. В математике *бесконечность* — совсем другое дело. Формальность, трюк, выдумка. Такая же как *мнимая единица* i или даже действительная, 1. Критерий «существования» здесь — непротиворечивость. Фокусы должны работать и не приводить к эксцессам. Всё!

Чехарда возникает по околomатематическим причинам. Публика ищет для ∞ прообразы и аналогии в житейском море, чем портит песню. В результате математическая бесконечность перепутывается с космической, и « ∞ » обрастает всякой чертовщиной. Сам же фокус ∞ работает эффективно как инструмент без всякой необходимости его интерпретации.

Причём работает всюду. Явно и неявно, скрытно и прилюдно. Допустим, необходимо решить уравнение



$$\sqrt{x + \sqrt{x + \cdots + \sqrt{x + 3}}} = 3, \quad (15.4)$$

с 25-ю радикалами слева. Прямолинейно освободиться от иррациональности тут весьма обременительно. Но есть обходной маневр. Тройку под радикалом заменим на всю левую часть (15.4), и повторим эту операцию бесконечное число раз. В результате (15.4) перейдет в уравнение

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = 3 \quad (15.5)$$

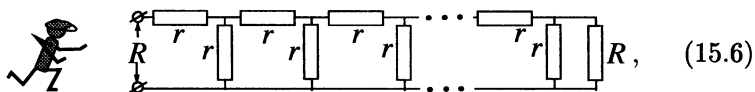
с бесконечным числом радикалов (тройка «ушла за горизонт»). Поскольку бесконечность минус один — опять бесконечность,

подчеркнутая часть равна всей левой части (15.5). Поэтому уравнение (15.5) эквивалентно

$$\sqrt{x+3} = 3,$$

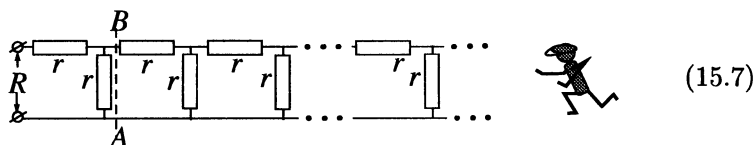
откуда $x = 6$.

Вот та же идея в другом исполнении. Необходимо так подобрать правое сопротивление R в электрической цепи



чтобы сопротивление всей цепи тоже было равным R .

При большом числе звеньев решение задачи в лоб — весьма трудоёмко. Выход из положения: заменяем правое R всей цепью (15.6), сопротивление которой тоже равно R . В полученной цепи с удвоенным числом звеньев снова заменяем правое R всей цепью (15.6) и т. д. В результате получается бесконечная цепь⁷⁾



Определение сопротивления цепи (15.7) представляется ещё более сложной задачей, но тут как раз срабатывает состоявшаяся бесконечность. Цепь справа от сечения AB равносильна самой цепи (15.7). Но тогда исходная задача равносильна определению R в задаче

$$R = r + \frac{rR}{r+R} \Rightarrow R = \frac{1+\sqrt{5}}{2}r.$$

Золотое сечение возникает, между прочим.

Конечно приведены два пустячка. Но они в миниатюре демонстрируют механизм.

⁷⁾ По мере увеличения числа звеньев роль R стремится к нулю.

15.3 Теорема Кронекера

1. В случае иррационального α последовательность



$$x_k = \{\alpha k\},$$

где фигурные скобки обозначают дробную часть числа, всюду плотна на $[0, 1]$, т. е. на любом, сколь угодно малом, интервале $(a, b) \subset [0, 1]$ найдутся точки $x_k \in (a, b)$.

Факт 1. есть по сути известная *теорема Кронекера*, которая обычно формулируется несколько иначе:

2. Для произвольного иррационального $\alpha \in \mathbb{R}$ и любых $x < y$ всегда можно указать целые m и n такие, что⁸⁾

$$x < m\alpha - n < y.$$



(15.8)

◀ Считаем $|x - y| < 1$ — в противном случае x и y можно сблизить, ужесточив требование (15.8) — и $(x, y) \subset (0, 1)$, иначе для близких x, y (имеющих одинаковые целые части) условию (15.8) можно удовлетворить, меняя n . Разобьем далее $(0, 1)$ на достаточно большое число равных по длине интервалов $\Delta_1 \dots, \Delta_N$ так, чтобы какой-то интервал Δ_j попал целиком в промежуток (x, y) . Среди $\{m\alpha - n\}$ при всевозможных m и n найдутся

$$m_1\alpha - n_1 \quad \text{и} \quad m_2\alpha - n_2 \quad (m_1 \neq m_2),$$

попадающие в один и тот же интервал Δ_k . Поэтому⁹⁾

$$\gamma = (m_1 - m_2)\alpha - (n_1 - n_2) \in \Delta_1 \Rightarrow j\gamma \in \Delta_j \subset (x, y). \quad \blacktriangleright$$

⁸⁾ Иными словами, множество $m\alpha - n$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) плотно на вещественной прямой при любом иррациональном α .

⁹⁾ Равенство $(m_1 - m_2)\alpha - (n_1 - n_2) = 0$ невозможно в силу иррациональности α и $m \neq n$.

Обращение к иррациональным числам помогает решать целочисленные задачи. Здесь удобный случай для демонстрации.

3. Всегда существует квадрат целого числа, десятичная запись которого начинается с любой наперёд заданной последовательности цифр $A = a_1, \dots, a_N$.

◀ Декларация 3. означает, что найдутся такие целые k и p , что

$$A \cdot 10^p < k^2 < (A + 1) \cdot 10^p.$$

После логарифмирования неравенство переходит в

$$\lg A < 2 \lg k - p < \lg(A + 1).$$

Полагая $k = 2^m$, $p = 2q$, получаем

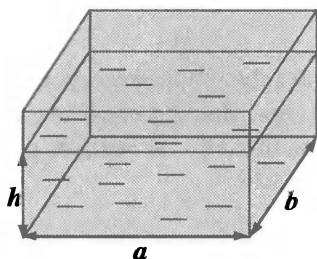
$$\lg A < 2m \lg 2 - 2q < \lg(A + 1).$$

Далее остается сослаться на *теорему Кронекера*. ▶

15.4 Метод шевелений

Нарушая покой, быстрее приходим к выводам. О застывшем состоянии легче судить по реакции на малое возмущение.

Задача. Найти силу F , с которой давит вода на боковую стенку прямоугольного аквариума, a , b — длина, ширина; h — глубина.



С ходу неясно, как решать. Спасает идея *малых шевелений*, продуктивная во многих задачах. Мысленно освободим боковую стенку и дадим ей возможность сдвинуться на очень малую величину Δx , что

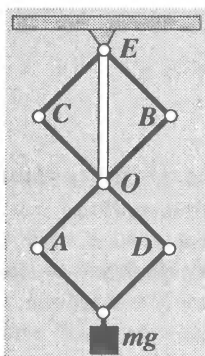
вызовет опускание уровня воды в аквариуме на величину Δh . Поскольку объём воды сохраняется,

$$abh = a(b + \Delta x)(h - \Delta h). \quad (15.9)$$

Поэтому с очень большой точностью¹⁰⁾

$$\Delta h = \frac{h}{b} \Delta x.$$

Пусть вес воды — P . Тогда приравнявая работу¹¹⁾ $F \cdot \Delta x$ уменьшению потенциальной энергии воды $P \frac{\Delta h}{2}$, находим $F = P \frac{h}{2b}$.



Задача. Найти натяжение резинки (пружины) EO в конструкции, изображённой слева. Чёрные стержни шарнирно соединены. Стержни AB и CD цельковые.

Если груз mg сместится на Δx , пружина EO растянется на $\Delta x/2$. Поэтому

$$mg \Delta x = T \frac{\Delta x}{2},$$

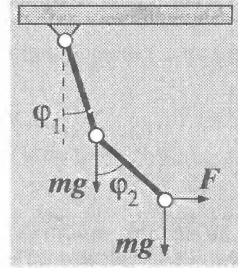
откуда натяжение пружины $T = 2mg$.

Подобный способ мысленного шевеления замерших конструкций эффективен во многих ситуациях. Заодно такие задачи иллюстрируют метод составления уравнений с помощью вычисления чего угодно *разными путями*.

¹⁰⁾ Равенство (15.9) после раскрытия скобок, сокращения abh и деления на Δh — переходит в $h \frac{\Delta x}{\Delta h} = b - \Delta x$, т. е. $\frac{\Delta x}{\Delta h} = \frac{b}{h}$ с точностью до Δx , которое сколь угодно мало.

¹¹⁾ Силы F , давящей на боковую стенку, на перемещении Δx .

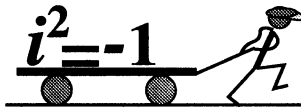
В некоторых случаях, не пошевелив условие, задачу вообще трудно решить. В качестве упражнения, например, можно попробовать найти углы φ_1 , φ_2 в механической конструкции, рис. справа. Чёрные стержни шарнирно соединены. Вес каждого шарнира mg . На нижний груз (шарнир) действует горизонтальная сила F , см. видео «Метод виртуальных шевелений» на oschool.ru.



15.5 Комплексные числа

Расширение игровой площадки натурального ряда \mathbb{N} до вещественной прямой \mathbb{R} всех целых не достигает. Для простой арифметической операции возведения в квадрат обратная операция \sqrt{x} на половине \mathbb{R} остаётся неопределённой. Квадратные уравнения не всегда решаются. Поначалу, конечно, думается, ну и шут с ним. Невелика потеря. Но потери на самом деле очень велики, о чём заранее трудно догадаться.

Так или иначе, попробуем что-либо предпринять, а там посмотрим. Что мешает нам объявить, что некое i при возведении в квадрат даёт -1 . Тогда решением $x^2 = -1$ будет $x_{1,2} = \pm i$.



На этом сказка, понятное дело, не заканчивается. Замкнутость в арифметике требует ещё приплюсовать к \mathbb{R} числа вида¹²⁾

$$x \pm iy, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

которые и называют **комплексными**. Их множество \mathbb{C} называют также **комплексной плоскостью**. Не факт, конечно, что этого хватит для любых арифметических действий. Но этого хватает, как потом выяс-

¹²⁾ Дабы всё можно было складывать и перемножать.

няется, и для деления¹³⁾, и для извлечения корней,

$$\sqrt{i} = \pm \frac{(1+i)}{\sqrt{2}},$$



и даже для извлечения корней любой степени. К тому же решаться начинают и алгебраические уравнения любой степени, не только квадратные! Что свидетельствует о большой удаче и точном попадании.

Комплексные числа, надо согласиться, при беглом знакомстве уводят почву из-под ног. Однако за удивительным фасадом здесь прячется вполне рациональная идея. Где остановиться — каждый решает сам. Но в любом случае начало пути пролегает через обыкновенное знакомство с объектом.

Определение. *Комплексными числами (КЧ) называются числа вида*

$$z = x + iy,$$

где x, y — обыкновенные вещественные числа, а i — так называемая мнимая единица, $i^2 = -1$. Величину x называют действительной частью, y — мнимой, и пишут¹⁴⁾



$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z).$$

Операции сложения и вычитания определяются покомпонентным сложением и вычитанием:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$



¹³⁾ Опять-таки со скидкой на запрет деления на нуль.

¹⁴⁾ Имея в виду Re — от англ. real, Im — от imaginary.

Два КЧ считаются равными, когда равны их действительные и мнимые части. Понятия *больше/меньше* для КЧ не определены. Правило умножения получается обыкновенным раскрытием скобок. С учётом $i^2 = -1$, это даёт

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

Легко проверяется наличие стандартных свойств умножения.

Для деления используется несложный трюк избавления от мнимой единицы в знаменателе, опирающийся на факт вещественности произведения

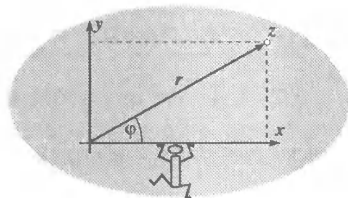
$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2,$$

где $z^* = x - iy$ называют *сопряжённым числом*. В результате

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*}$$

избавляет от мнимой единицы в знаменателе, и сводит деление к умножению $z_1 z_2^*$ в числителе.

Указанные способы умножения и деления на практике используются редко, поскольку есть гораздо более эффективные приемы, основанные на геометрическом представлении КЧ: числу $z = x + iy$ сопоставляется вектор на плоскости $z = \{x, y\}$, рис. (15.10). Вот вам и воплощение фикции.



(15.10)

В *полярных координатах*, $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ — *модуль* z , φ — *аргумент* z , в силу

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

КЧ z записывается в *тригонометрической форме*¹⁵⁾

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$


Неожиданно обнаруживается, что «неуклюжее» умножение имеет прозрачный геометрический смысл. При умножении z_1 и z_2 модули перемножаются, аргументы складываются. Формула

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (15.11)$$


элементарно проверяется¹⁶⁾, как и формула деления:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

В тригонометрической форме удобно извлекать корни. При $k = 0, 1, \dots, n-1$ получаются n *различных* корней n -й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$


что проверяется обратным возведением в n -ю степень по очевидной, в силу (15.11), *формуле Муавра*



$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

и с учётом периодичности синуса и косинуса.

¹⁵⁾ В силу периодичности тригонометрических функций аргумент φ , вообще говоря, многозначен:

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

¹⁶⁾ Опорой на формулы синуса и косинуса суммы двух углов.

Отметим также авансом *формулу Эйлера*

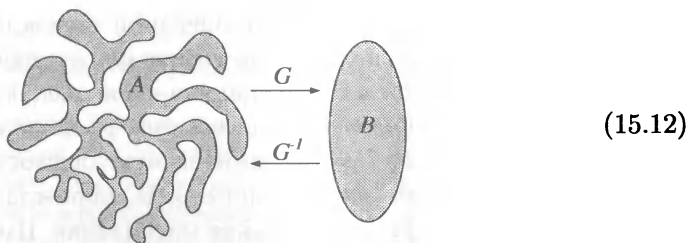
$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$



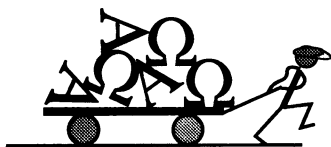
истинная природа которой выявляется уже в университете.

Удача с находкой *геометрической/тригонометрической формы* комплексного числа — далеко не рядовое событие. *Это пример чуда*, которое происходит вот по такой схеме.

Большие и малые разделы математики с той или иной долей натяжки можно себе представлять, как изучение некоторого множества A объектов с определёнными в этом множестве операциями. Какие-то операции выполняются легко, какие-то — трудно. Естественно выглядит попытка установить взаимно однозначное соответствие A с каким-либо другим множеством B , и посмотреть, какие манипуляции в B соответствуют операциям в A . Если действия в B проще операций в A , то задачи можно решать по схеме, изображенной на рисунке



Объекты из A трансформируются в B с помощью преобразования G , там выполняются необходимые действия, и результат возвращается в A . Удачный выбор B — всегда событие.



Философски настроенная часть населения часто интересуется, комплексные числа существуют во Вселенной сами по себе или это мы придумали их для своего удобства? Первая точка зрения облегчает дорогу в сумасшедший дом, где закончили жизненный путь многие творцы *теории множеств*. Поэтому вторая точка зрения предпочтительна, и её имеет смысл придерживаться до поры до времени.

«Магическая природа» комплексных чисел даёт о себе знать и там и сям. Ситуация *на действительной прямой* странным образом почти всегда оказывается зависящей от того, как соответствующие задачи инсталлированы в *комплексную плоскость*. До некоторой поры математическая общественность противилась использованию комплексных чисел. Но постепенно идеология модельных реализаций вошла в плоть и кровь, и свободомыслие вторглось в мир «чисел». Стало ясно, что обычная единица ничуть не реальнее мнимой. В вопросе «что первично, курица или яйцо» тоже произошёл переворот. Главенствующую роль взяли на себя операции, действия. Числа стали вторичны. Для выполнимости действий требовалось лишь подходящее игровое поле. Поначалу думалось — неважно какое. Потом выяснилось — вариант один: \mathbb{C} .

Таким образом, арифметические операции порождают цепную реакцию. Из натурального ряда возникают отрицательные числа, потом дроби, затем мнимая единица и, наконец, комплексные числа. На этом *единственно возможное расширение* игрового поля заканчивается. Так что комплексную плоскость \mathbb{C} , как неизбежный финал роста натурального ряда, порождает арифметика, на которой стоит вся остальная математика. Именно поэтому КЧ дают о себе знать практически в любой области.



Здесь имеет смысл напомнить пример, который мы рассматривали в разделе 3.8, пребывая в состоянии «невесомости». Теперь у нас есть инструмент, и мы можем называть вещи своими

именами. Речь идёт о числовой последовательности a_n ,

$$1, 1, 0, -2, -4, -4, 0, 8, 16, 16, 0, -32, \dots,$$

устроенной по правилу $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$. Стандартный рецепт заключается в поиске решения в виде $a_n = x^n$, что приводит к уравнению

$$x^2 - 2x + 2 = 0,$$

которое, как пока считается в школе, не имеет решения, но его корни на самом деле¹⁷⁾

$$x_{1,2} = 1 \pm i,$$

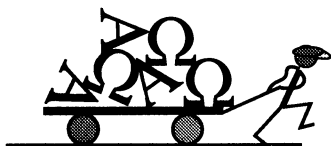
и формула для a_n при условии $a_0 = a_1 = 1$ получается такой

$$a_n = \frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{2}.$$

Заметим, что все i в нечётных степенях здесь взаимно уничтожаются, и a_n получаются действительными, причём в точности вычисляют a_n . Другими словами, комплексные числа в данном случае решают исходную задачу, в которой никаких мнимостей изначально нет.

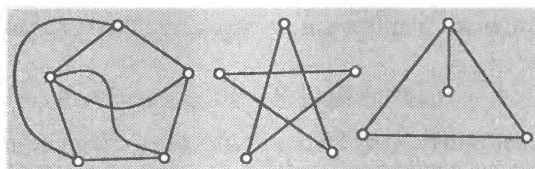
15.6 Сетевые графики

Тематика данного раздела, изучаемая обычно на более высоких ступенях образования, как ни удивительно, доступна школьникам, класса эдак с шестого. При этом всё очень просто, и в то же время ориентировано на реальные практические задачи. На составление и оптимизацию любых проектов, от полёта на Марс до завоевания сердца Василисы Прекрасной. Впрочем, смотрите сами.



¹⁷⁾ Определяются по обычной формуле $x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Подготовная излагается на языке *графов*. Штука полезная сама по себе, и её неплохо всегда иметь под рукой.



(15.13)

Множество точек (кружочков) — *вершин* V , соединённых линиями — дугами, *ребрами* (u, w) , где $u, w \in V$ — называют *графом*¹⁸⁾. На рис. (15.13) изображены примеры графов. Вершины удобно нумеровать, и тогда рёбра — это пары целых чисел (i, j) . Последовательность вершин $\{i_1, \dots, i_n\}$, *соединённых ребрами*, называют *путём*, соединяющим вершины i_1, i_n . Путём, или *цепью*, называют также последовательность ребер

$$(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{n-1}, i_n).$$

Граф, у которого любые две вершины соединены некоторым путём, считается *связным*. Замкнутый путь, начинающийся и заканчивающийся в одной и той же вершине, — это *цикл* (*контур*)¹⁹⁾. Ребра *ориентированного графа* имеют направление — что на рисунках изображается стрелочками, а при описании пар (i, j) фиксацией порядка.

¹⁸⁾ О графах можно рассуждать алгебраически — как о заданном подмножестве пар (u, w) из произведения $V \times V$. Но это игра с завязанными глазами. Исходный язык графов — наглядные геометрические образы (рис. 15.13), помогающие выбирать пути решения задач.

¹⁹⁾ Вот ещё несколько терминов впрок, которые на не потребуются, но кому-то могут пригодиться. У *простого цикла* все ребра различны, а у *элементарного* — нет *подциклов* (циклов, не совпадающих с исходным). *Гамильтонов цикл* — это элементарный цикл, проходящий через все вершины графа. Граф без простых циклов считается *лесом*. Связный лес — *дерево*. Заметим также, что вершины i и j , соединённые ребром, называют *смежными*, а ребро, выходящее из вершины k (либо входящее) — *инцидентным* вершине k . Различие приобретает смысл в *ориентированных графах*, где «входит» и «выходит» — разные понятия.

К слову сказать, на терминологии важно не заикаться, ибо соблазн оговорить «всё» — создаёт мешанину, в которой никто не хочет разбираться. К тому же, некоторый люфт определений обеспечивает гибкость, присущую обыкновенному языку, и создаёт менее напряжённую атмосферу. Конечно, кто-то скажет, что проще «всё определить». Но проблема не так проста. Груда мелких определений способна превращаться в монолит, где компоненты уже не видны и никому не интересны. Именно поэтому компьютерные программы стали делать так, чтобы разобраться можно было без инструкций. Подобный стиль имеет свои плюсы и в других областях, в том числе — в математике.

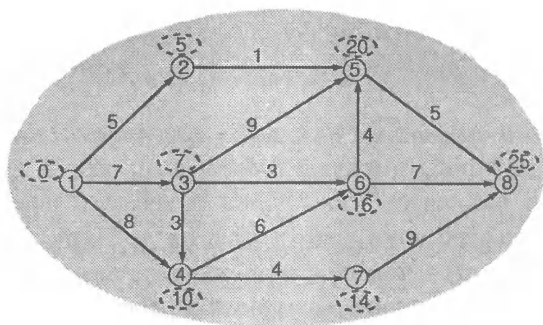
Итак, *сетевыми графиками* называют *ориентированные графы без циклов*. Вершины именуют *событиями*, рёбра (дуги) — *операциями*, или *работами*. Так удобно описывать различные проекты: строительство дома, запуск ракеты на Луну, научный поиск и т. п. Структуру сетевого графика определяют ограничения на допустимую очерёдность выполнения работ (стены, потом крыша). Хорошо поставить задачу, разумеется, нелегко. Необходимо вникнуть в ситуацию, составить список операций, выбрав подходящий уровень детализации, проследить логику выполнения, перепроверить — сто раз. Зато потом — ход работ как на ладони. Хитросплетение обстоятельств заменяется наглядным графиком. И одна лишь картинка помогает исключить асфальтирование дороги до прокладки кабеля.

Когда-то сия кухня была очень популярна. Ни один проект не мог стартовать без сопровождения сетевой диаграммой. Эпопея началась в 1958 году в США с разработки методов PERT²⁰⁾, каковые первоначально были применены в проекте создания ракетной системы «Поларис», а затем вошли в моду по всему миру. Но со временем как-то приелись, мода сошла на нет, и теперь о PERT мало кто вспоминает, хотя идеи, лежащие здесь в основе, **феноменально продуктивны**, о чём будет сказано в конце раздела. Пока же остановимся на маленьком фрагменте, который в силу своей притягательности мешает оценить роль всего айсберга.

Итак, всякий проект — от женитьбы до сотворения мира — состоит из совокупности операций, каковые могут называться

²⁰⁾ Program (Project) Evaluation and Review Technique (PERT).

действиями, мероприятиями, маневрами. Операции всегда находятся в определённой логической взаимосвязи. Фундамент дома нельзя соорудить пока не выкопан котлован, а многое не может тронуться с места пока не обеспечено финансирование, не получены разрешения, не даны обязательства, не подвезены материалы и т. д. Вот пример *сетевого графика* небольшого проекта.



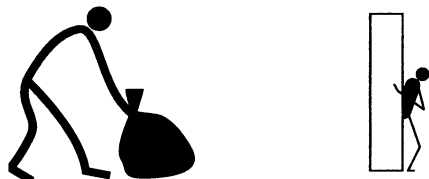
(15.14)

Операции здесь изображаются ориентированными дугами. Вершины графа условно называют событиями. Пронумерованные события никакого содержательного смысла обычно не имеют, кроме того что *входящие* в него дуги (операции) выполнены, и можно приступить к выполнению *выходящих* дуг (операций). Событие 6, например, означает выполнение операций O_{36} и O_{46} .

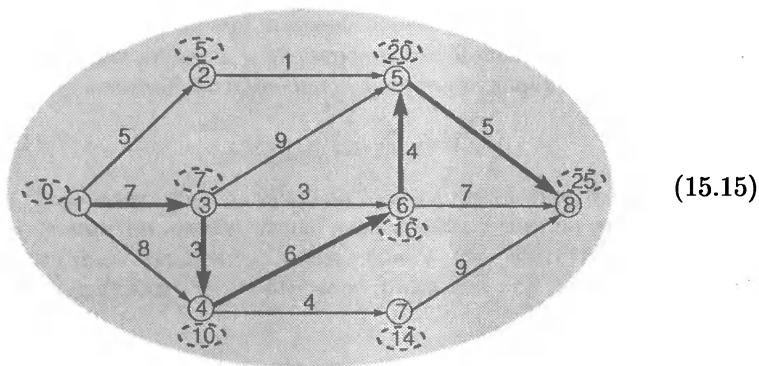
В одной из эталонных задач операциям приписываются длительности. Числа на дугах графа (15.14) обозначают длительности операций. Далее начальному событию 1 приписывается время 0 и определяются *времена наступления* других событий в предположении, что все операции начинаются как только для их выполнения появляется возможность.

Операция O_{12} длится 5 дней, поэтому событие 2 наступит через 5 дней — пишем 5 рядом и обводим пунктиром. Аналогично, время наступления события 3 равно 7. Пишем 7 и обводим пунктиром. Чтобы наступило событие 4, надо выполнить операции O_{14} и O_{34} . Операция O_{34} длится 3 дня, но она может начаться только по истечению 7 дней (время события 3). Значит O_{34} будет завершена через 10 дней ($3 + 7 = 10$). Время операции O_{14} равно $8 < 10$ — поэтому время события 4 есть $\max\{8, 10\} = 10$.

Дальнейшее определение времен наступления событий при движении по графику слева направо — идёт аналогично. В конце находится время 25 последнего события 8. Это уже полезный результат. Глядя на график, так сразу ведь не скажешь, что все работы можно завершить за 25 дней.



Следующий этап — просмотр сетевого графика *справа налево*, и определение *критического пути* по рецепту *динамического программирования*. Как получилось время 25? — Время события 5 было сложено с длительностью O_{58} — операцию O_{58} выделяем как *критическую*. Начинается O_{58} в событии 5, время 20 наступления которого получилось как $16 + 4$ — операция O_{65} *критическая*, её начало в 6.



И так далее. В итоге получается выделенный на рис. (15.15) *критический путь*, состоящий из последовательности *критических операций*, которые необходимо начинать вовремя. Задержки с критическими операциями увеличивают время окончания всего

комплекса работ. Для остальных операций есть резервы времени, которые можно посчитать²¹⁾.

Вот собственно и всё, что остаётся в сухом остатке, когда сетевые методы доходят до широких слоёв населения. Роковой акцент делается на поиске критического пути. А у населения-то задачи не совсем такие. И вообще, кстати, на чём акцент ни сделай, в цель не попадёшь. Практика всегда ускользает от теории. Всякая декларация порочна в своей неподвижности, тогда как реальность изменчива, текуча, неуловима.

Что касается данной ситуации, то помимо фиксации акцента допускается ещё губительный перекосяк. Дело-то не в критическом пути. Не это главное. Сетевые методы помимо решения частных задач дают язык, глаза, координатную сетку мышления о проектах, принципы моделирования. Вот что главное. Исследователь получает инструмент, избавляющий от блуждания впотьмах.

15.7 О теории игр

Теория игр ассоциируется обычно с «игрой в бирюльки», тогда как изучает не только и не столько азартные игры, сколько *повсеместно распространённые* системы, в которых противоборствуют индивидуальные интересы. Почти всё, что не слишком просто устроено, состоит из взаимосвязанных и взаимно влияющих друг на друга частей. Пусть, например, система характеризуется *критерием эффективности*²²⁾

$$D(x) = D(x_1, \dots, x_n), \quad (15.16)$$

но *рычаги* $x_i \in X_i$ находятся в руках различных *подсистем* G_i . И если G_i не хотят или не могут действовать согласованно, оптимизировать $D(x)$ не удаётся. Более того, у подсистем G_i , называемых также *элементами системы*, или *игроками*, часто имеются *индивидуальные функции выигрыша*

$$D_i(x) = D_i(x_1, \dots, x_n), \quad (15.17)$$

²¹⁾ Обдумывание примера в данном случае — простейший путь для понимания сути дела. Формулировка общего рецепта, включая уточнение деталей (типа того, что критических путей может получиться несколько) могут служить здесь не очень трудным упражнением.

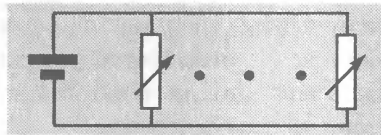
²²⁾ Каковой называют также *целевой функцией*, *функцией выигрыша* и др.

и они стремятся оптимизировать $D_i(x)$, каждый свою. Но что из этого получится, трудно сказать, потому что G_i распоряжается выбором только x_i , а его выигрыш D_i зависит от всего вектора

$$x = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

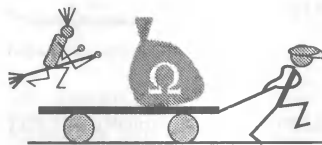
Собственно, это и есть ключевая модель *теории игр*. Имеется n *игроков* G_i , распоряжающихся выбором $x_i \in X_i$ и заинтересованных в максимизации собственных *функций выигрыша* (15.17). «Величины» x_i в теории игр называют *стратегиями*²³⁾.

Прежде чем думать о формализованных постановках задач на платформе (15.17), полезно запастись коллекцией примеров, дабы теория изначально была заземлена. Начинать естественно с малого. Рассмотрим электрическую схему



(15.18)

где к источнику ЭДС подсоединены параллельно регулируемые сопротивления, на каждом из которых «сидит игрок» G_i и пытается положением регулятора x_i поддерживать ток I на уровне I_{io} , минимизируя уклонение $D_i = |I - I_{io}|$. Влияние игроков G_i друг на друга обусловлено зависимостью напряжения на общей шине от суммарного тока.



Пример выглядит искусственно, но такого сорта игрушки реально используются для проверки психологической совместимости команды $\{G_1, \dots, G_n\}$. В этих случаях вместо (15.18) подбираются более сложные, неустойчивые схемы²⁴⁾. Кстати, модель (15.18) представляет собой электрический эквивалент системы параллельно соединённых душевых колонок, в которой потребители G_i регулированием кранов пытаются обеспечить себе желаемую температуру.

²³⁾ Термин неудачный, но он устоялся.

²⁴⁾ Регулировать «свой ток» в неустойчивой схеме — нелёгкое занятие, способное довести участника до нервного срыва.

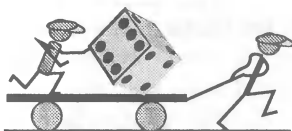
Так что каждый раз, когда вы решаете, кого назначить управляющим, какой бизнес начинать, куда пойти учиться, на ком жениться, на что деньги тратить — для получения ответа необходимо учитывать, как на ваши результаты влияют неподвластные вам факторы.

15.8 Решение игры по Нэшу

В описанной выше игровой модели возникает вопрос: *какой выбор стратегий $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ будет равновесным?* В принципе ответов может быть много, но практика чаще всего показывает следующее. Если, скажем, предприятие G_i знает, что изменением x_i может увеличить свой выигрыш, то не удерживается от соблазна. При этом равновесной может быть лишь такая точка x , в которой ни один из элементов не может добиться увеличения своего выигрыша изменением собственной переменной x_i . В теории игр такое *равновесие x^** называется *решением игры по Нэшу*, или *равновесием Нэша*. Вот до некоторой степени парадоксальный пример, ставший классическим.

Дилемма заключенного. Это игра двух участников с матрицей выигрышей (в данном случае — проигрышей):

$$\begin{bmatrix} (1; 1) & (9; 0) \\ (0; 9) & (8; 8) \end{bmatrix}.$$



Первый игрок (заключенный) выбирает строку, второй — столбец. На пересечении — годы тюрьмы. Первая цифра, выделенная жирным, обозначает, сколько сидеть первому заключенному, вторая — второму²⁵). Решая, что делать, первый заключенный стоит перед дилеммой: получить **1** год или **9** лет тюрьмы, выбрав первую строку; либо **0** или **8**, выбрав вторую. Выбирая вторую

²⁵) Схема обычно дополняется какой-нибудь небылицей. Заключенные, дескать, совершили тяжкое преступление. Но у прокурора нет доказательств, и он «организует игру». Сознавшийся и представивший доказательства — выходит на свободу, упорствующий — получает 9 лет тюрьмы. Если оба не сознаются — получают по году (например за незаконное хранение оружия). Оба сознаются — получают по 8 лет.

строку, он в любом случае выигрывает. Но игра симметрична. Партнеру точно так же выгоднее выбрать второй столбец. В результате оба сознаются в совершении преступления (см. сноску), и получают по 8 лет. Это и есть нэшевское решение.

Равновесие по Нэшу можно охарактеризовать как индивидуально разумное решение. В рассмотренном примере коллективно разумным решением представляется (1;1). Но парадокс не снимается даже возможностью предварительной договоренности. В конечном итоге каждый принимает решение самостоятельно, при этом оказывается выгодно нарушить договор.

Парадоксальность нэшевских решений — скорее правило, нежели исключение, и многие экономические системы находятся именно в таком равновесии. До некоторой степени удивительным представляется тот факт, что для эффективности экономики в целом это часто не имеет никакого значения. Подробнее тема излагается на oschool.ru.

15.9 Чем выгодны убыточные акции

Допустим, на рынке ценных бумаг имеется два типа акций, S_1 и S_2 , прибыльность которых зависит от каких-то трудно прогнозируемых событий (принятие закона о таможенных пошлинах, война и т. п.). Акция S_1 даст либо 8%, либо 2% прибыли; S_2 , соответственно, либо *минус* 4%, либо *плюс* 14%. Компактно ситуацию удобно записать в виде матрицы $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 2 & 14 \end{bmatrix}$. Покупатель выбирает столбец, т. е. какие акции покупать, S_1 или S_2 ; строка определяется неизвестными заранее обстоятельствами, A или B :



$$\begin{array}{rcc} & S_1 & S_2 \\ & \downarrow & \downarrow \\ A \rightarrow & 8 & -4 \\ B \rightarrow & 2 & 14 \end{array} \quad (15.19)$$

Покупать акции S_2 рискованно (могут оказаться убыточными), а гарантированная прибыльность S_1 — всего 2%. Тем не менее, из ситуации легко «выжимается» 5% прибыли. (!) Действительно, если акции S_1 , S_2 купить в количестве x_1 , x_2 штук, то прибыль будет:

$$\text{либо } d_1 = \frac{1}{x_1 + x_2}(8x_1 - 4x_2)\%,$$

$$\text{либо } d_2 = \frac{1}{x_1 + x_2}(2x_1 + 14x_2)\%.$$

Если ориентироваться на гарантированную прибыль $\min\{d_1, d_2\}$ то её максимум гарантируется равенством $d_1 = d_2$ (?)²⁶⁾, откуда следует $x_1 : x_2 = 3 : 1$. В этом случае

$$\min\{d_1, d_2\} = 5\%, \quad \text{проверьте!}$$

независимо от обстоятельств. Таким образом, *покупка потенциально убыточных акций поднимает гарантированную прибыль с двух до пяти процентов.*

Рассмотренный пример заслуживает внимания как никакой другой, потому что среднестатистическое мировоззрение обходит такие явления стороной. Все просто, широко распространено, но попадает в область слепого пятна. Задачи явно оптимизационного характера²⁷⁾, однако их природа неожиданна, непривычна и даже противоречива. Именно поэтому простые и яркие примеры здесь эффективнее абстрактной теории, в которой общность нивелирует колорит.

Авантюра века. Гениальная по сути идея, описанная выше, иногда рекламируется в теории игр как панацея для решения совсем других задач, в которых она не работает на самом деле.

Некоторые теоретики утверждают обратное. Как, дескать, надо было бы поступить, если бы в задаче (15.19) денег хватало на покупку лишь одной акции? Предложение «игровиков» состоит в том, чтобы предварительно «бросить монету». Техника вычислений та же самая. Вероятности выбора p_1, p_2 дают *матожидания*²⁸⁾ прибыли:

$$\text{либо } d_1 = (8p_1 - 4p_2)\%, \quad \text{либо } d_2 = p(2p_1 + 14p_2)\%. \quad (15.20)$$

²⁶⁾ Если не получается доказать это в качестве упражнения, посмотрите объяснение на oschool.ru.

²⁷⁾ Речь идет все-таки о выборе наилучших в некотором роде вариантов.

²⁸⁾ А не саму прибыль в результате однократной игры.

Аналогично предыдущему приходим к $d_1 = d_2$, откуда следует $p_1 : p_2 = 3 : 1$. В этом случае $\min\{d_1, d_2\} = 5\%$, независимо от обстоятельств. Но теперь-то это не прибыль, а журавль в небе, фантастика, фикция. Средняя прибыль в гипотетической ситуации бесконечного повторения «игры». И если кто-то думает, что увеличение такой «гипотетической прибыли» как-то положительно влияет на единичную реализацию, то никак не влияет. Разве что увеличивает шанс «влипнуть».

Вероятностный выбор стратегии (акции в данном случае) называют *смешанной стратегией*, и таковые в теории игр занимают весьма обширную территорию. Для бесконечно повторяющихся игр они действительно служат спасением.

Глава 16

Вероятность

*Аномалия — наиболее информативная
часть явления.*

16.1 Важное предисловие

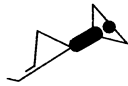
Жизненные пути большинства с вероятностями сталкиваются едва ли не каждый день. И потому изучение азов теории вероятностей (ТВ) в школе разумно и целесообразно. Но тут имеется некое затруднение. У всякой дисциплины есть свой критический уровень обзора, ниже которого лучше не опускаться. У ТВ он достаточно высок, о чём свидетельствуют и заблуждения великих математиков прошлых веков, и многочисленные парадоксы, до сих пор дразнящие население. Соответствующий школьный уровень, по-видимому, маловат для преодоления барьера. Поэтому, если кто хочет получить адекватные представления о теории вероятностей, дабы не путаться в трёх соснах, желательно черпать дополнительную информацию из различных источников¹⁾.

Далее мы начинаем с модели, к которой теория вероятностей пришла в результате долгих мытарств и заблуждений. Однако прямой путь не всегда самый лучший. Логически-то, конечно, идти надо напрямик к цели. Но психологически — имеет смысл пройтись по тем же закоулкам, по которым плутала ТВ. Поэтому более естественно начать с задач, имея в багаже лишь здравый смысл, см. oschool.ru. Тогда универсальная модель через некоторое время покажется спасением.

¹⁾ См., в частности, oschool.ru. Данная глава слишком краткая. Адекватный среднему образованию вариант ТВ будет издан отдельной книжечкой.

16.2 Основная модель

Итак. Геометрия Евклида не определяет точек и прямых. Теория вероятностей «не знает», что такое *вероятность элементарного события*. Это, мол, число из $[0, 1]$, первичное понятие, данное априори. Вероятности сложных событий — другое дело. Этим, собственно, и занимается теория. *Стартовая площадка теории вероятностей очень проста. Рассматривается конечное или бесконечное множество²⁾*



$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\},$$

называемое *пространством элементарных событий*, на котором задана функция $p(\omega_i)$, принимающая значения из $[0, 1]$ и удовлетворяющая условию нормировки $\sum p(\omega_i) = 1$. Значения $p(\omega_i)$ считаются *вероятностями элементарных событий* ω_i . Множества $A \subset \Omega$ называют *событиями* и определяют их вероятности как

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i). \quad (16.1)$$

Вот и весь фундамент, упрощённо говоря. Исторический путь к нему был долгим и запутанным. Теперь те дороги стали музеевыми лабиринтами.



Модель (16.1), разумеется, необходимо научиться привязывать к реальности. Для этого надо посмотреть, как примеры укладываются в общую схему³⁾.

²⁾ Континуальные варианты Ω тоже рассматриваются.

³⁾ Текстовое изложение предмета накладывает определённые рамки по части выбора наиболее экономных путей к цели.

• Из колоды вытяскивается 7 карт. Какова вероятность, что среди них ровно 3 короля и 2 дамы?

◀ Подтягивание задачи к общей схеме в данном случае совсем просто. Различные способы выбора 7 карт из 36 естественно считать равновероятными элементарными событиями, т. е. $p(\omega_i) = \frac{1}{C_{36}^7}$, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ число сочетаний из n элементов по k элементов.

Число различных выборов, удовлетворяющих условиям задачи, равно $C_4^3 C_4^2 C_{28}^2$. Искомая вероятность есть $\frac{C_4^3 C_4^2 C_{28}^2}{C_{36}^7}$. ▶

• При размещении k шаров по 365 ячейкам вероятность того, что все шары попадут в разные ячейки, равна $\frac{A_{365}^k}{365^k} (?)$.

В задачах, где элементарные события *равновероятны*, $P(A)$ всегда равно числу вариантов, составляющих A , деленному на число всех вариантов:



$$P(A) = \frac{\text{число благоприятных вариантов}}{\text{число всех вариантов}}.$$

На первый взгляд, суть дела тривиальна. Однако не все так просто, как поначалу кажется.

Парадокс Кардано. При бросании двух игральных костей сумма выпавших чисел получается равной — как для 9, так и для 10 — в двух вариантах:

$$\text{сумма } 9 \Leftrightarrow (3, 6) (4, 5), \quad \text{сумма } 10 \Leftrightarrow (4, 6) (5, 5).$$



Но вывод о равенстве вероятностей этих событий — ошибочен. Число способов получения сумм 9 и 10 на самом деле разное:

$$\text{сумма } 9 \Leftrightarrow (3, 6) (6, 3) (4, 5) (5, 4), \quad \text{сумма } 10 \Leftrightarrow (4, 6) (6, 4) (5, 5).$$

Таким образом, из 36 возможных пар чисел 4 пары дают в сумме 9, и только 3 — 10. Вероятности, соответственно, равны $4/36$ и $3/36$, что подтверждает эксперимент⁴⁾.

На данном примере становится понятно, что в подборе пространства Ω элементарных событий имеется произвол. Первый вариант — это 36 равновероятных *упорядоченных* пар (i, j) . Второй вариант Ω — это *неупорядоченные* пары (21 пара), но тогда они не равновероятны, и в этом аккуратно надо разобраться. Задача выглядит то простой, то сложной. Начинаешь присматриваться, и ум заходит за разум. Недаром в такого рода задачах ошибались в том числе великие *Лейбниц* и *Даламбер*.

Путаницу в задаче создаёт независимость суммы от перестановки слагаемых. При последовательном выбрасывании костей — сначала первая, потом вторая — проблемы не возникает. Но кости, выбрасываемые одновременно, падают вместе, и первая от второй не отличается. Тогда различных вариантов имеется только 21 — и не вполне ясно, почему они не равновероятны.

Чтобы полностью развеять туман, полезно выделить подзадачу, в которой проблема сконцентрирована в максимально простом виде. *Какова вероятность при бросании двух костей получить в результате (5,5) и (4,6)?*

16.3 Объединение и пересечение событий

Объединением, или *суммой событий* A и B называют событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A , B , и обозначаемое как $A \cup B$, или $A + B$. Первое обозначение прямо указывает, какое множество в Ω отвечает сумме событий.

Пересечением, или *произведением событий* A и B называют событие, состоящее в совместном наступлении A , B , и обозначаемое как $A \cap B$, или AB .

⁴⁾ При достаточно большом количестве бросаний двух костей — частоты, с которыми в сумме выпадают 9 и 10, стремятся к указанным вероятностям.

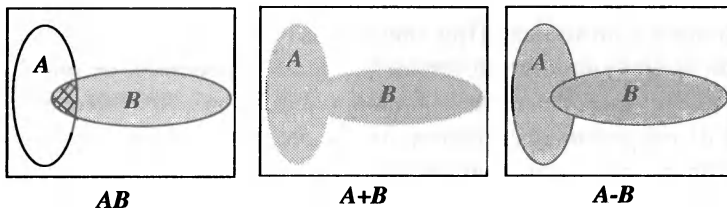
Очевидно,

$$\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)} \quad , \quad (16.2)$$

поскольку при суммировании ω_i по A и B элементарные события из пересечения AB считаются два раза, и один раз $P(AB)$ приходится вычесть. Если события не пересекаются, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

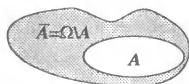
Формулы типа (16.2) становятся совершенно прозрачны при использовании рисунков объединения и пересечения множеств.



Опробовать рецепт можно на проверке равенства

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

Параллели логических высказываний с операциями над множествами используются достаточно широко. Событию «не A » отвечает дополнение \bar{A} множества A в Ω ,



а разность $A \setminus B$, или $A - B$, интерпретируется как наступление A , но не B . Наконец, *симметрическая разность*

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

обозначает событие, состоящее в наступлении одного из A , B , но не двух вместе. Пустое множество \emptyset , считается, принадлежит Ω и символизирует невозможное событие. При этом $P(\emptyset) = 0$. С учётом нормировки $P(\Omega) = 1$, очевидно, $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Перечисленные действия над событиями в совокупности с формулами вычисления вероятностей позволяют решать многие задачи, не спускаясь на уровень рассмотрения пространства элементарных событий. Это экономит усилия, но иногда затрудняет ориентацию.

16.4 Условная вероятность

Вероятность $P(B|A)$ наступления B при условии наступления в то же время события A — называют *условной*.

Из всех $\omega_i \in A$ входят в B лишь ω_i , принадлежащие пересечению AB . Они-то и определяют $P(B|A)$. И если бы A было нормировано, то $P(B|A)$ равнялось бы $P(AB)$. Нормировка A корректирует результат очевидным образом:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}. \quad (16.3)$$

Перезапись (16.3) в форме

$$P(AB) = P(A)P(B|A).$$



(16.4)

называют *формулой умножения вероятностей*.

Задача. Имеется три картонки. На одной — с обеих сторон нарисована буква А, на другой — В. На третьей картонке с одной стороны А, с другой — В. Одна из картонок выбирается наугад и кладется на стол. Предположим, на видимой стороне картонки оказывается буква А. Какова вероятность, что на другой стороне — тоже А?

«Одна вторая», — ошибочно отвечает интуиция, и причина заблуждения далеко не очевидна. Дело в том, что картонка не только случайно выбирается, но и случайно укладывается на одну из сторон. Поэтому логика здесь такая. Всего имеется шесть нарисованных букв, из них — три буквы А, две на картонке АА и одна — на АВ. Букву А из АА вытащить в два раза более вероятно, чем из АВ. Получается, вероятность того, что на столе лежит картонка АА, равна $\frac{2}{3}$.

Если кого-то смущают картонки, то это — для простоты и краткости. Реальные прикладные задачи описывать громоздко, а читать

скучно. Но таких задач, где здравый смысл терпит фиаско, довольно много. И дело не в том, что ахиллесова пята интуиции приходится на вероятность. Слабое место интуиции в другом. Взаимодействие всего двух факторов ставит воображение в тупик.

16.5 Независимость

События A и B называют *независимыми*, если $P(B|A) = P(B)$, т. е. формула умножения вероятностей (16.4) переходит в



$$P(AB) = P(A)P(B). \quad (16.5)$$

Из (16.5), в свою очередь, следует $P(A|B) = P(A)$.

16.6 Случайные величины

Числовая функция $X(\omega)$, заданная на Ω , представляет собой *случайную величину*. Примером может служить функция, принимающая значения 1 или 0 при выпадении герба или решётки.

Среднее значение $m_x = E(X)$ случайной величины⁵⁾ X ,

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega)$$

называют *математическим ожиданием* $X(\omega)$.

Матожидание *функции-индикатора* $\chi_A(\omega)$ множества (события) A ,

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A; \\ 0, & \text{если } \omega \notin A, \end{cases}$$

равно, очевидно, вероятности $P(A)$.

⁵⁾ «Функцию» E называют *оператором математического ожидания*.

Матожидание представляет собой весьма важную характеристику случайной величины. Очевидно,

$$\mathbf{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbf{E}(X) + \beta \mathbf{E}(Y).$$

На вид всё просто, но, как говорится, в тихом омуте черти водятся.

16.7 Парадокс транзитивности

Сравнивая случайные величины X и Y , будем говорить « X больше Y по вероятности», если

$$\mathbf{P}\{X > Y\} > \mathbf{P}\{X \leq Y\},$$

т. е. вероятность неравенства $X > Y$ больше 1/2.

Пусть пространство элементарных событий Ω состоит из 6 точек, в которых с.в. X , Y , Z , W с равной вероятностью 1/6 принимают значения согласно таблице⁶⁾:

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| X | 6 | 6 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Y | 5 | 5 | 5 | 1 | 1 | 1 |
| Z | 4 | 4 | 4 | 4 | 0 | 0 |
| W | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |



Очевидно, $X = 6$ с вероятностью $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. В этом случае $X > Y$ независимо от значения Y . С вероятностью $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ величина X равна 2. Тогда $X > Y$, если $Y = 1$, что имеет вероятность $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$. Поэтому, с учётом формул умножения вероятностей и суммы непересекающихся событий, итоговая вероятность неравенства $X > Y$ равна

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

⁶⁾ Функция X , например, может быть реализована бросанием шестигранной кости, грани которой помечены цифрами {6 6 2 2 2 2}.

Аналогично подсчитывается, что $Y > Z$, $Z > W$, с той же вероятностью $\frac{2}{3}$. Получается цепочка неравенств

$$X > Y > Z > W.$$



Возможность $W > X$ представляется в некотором роде дикой. Тем не менее, $W > X$ с вероятностью $\frac{2}{3}$ (!).

16.8 Подводные рифы статистики

Теория оперирует вероятностями, практика — статистическими данными, т. е. исходами опытов, будь то бросание костей, количество аварий, смертей, выздоровлений и т. п. Умение делать выводы на базе статистики составляет оборотную сторону **ТВ**.

Не слишком утрируя действительность, допустим, что медики провели эксперимент по оценке влияния средства «чирикс» на заболевание «чикс». Как всегда делается, контрольной группе давали плацебо. Гипотетические данные по Калуге и Рязани приведены в таблицах.

| <i>Калуга</i> | <i>чирикс</i> | <i>плацебо</i> |
|-----------------------|---------------|----------------|
| <i>помогло</i> | 10 | 1 |
| <i>безрезультатно</i> | 80 | 9 |

, $\frac{10}{10+80} > \frac{1}{1+9},$

| <i>Рязань</i> | <i>чирикс</i> | <i>плацебо</i> |
|-----------------------|---------------|----------------|
| <i>помогло</i> | 10 | 89 |
| <i>безрезультатно</i> | 0 | 1 |

, $\frac{10}{0+10} > \frac{89}{1+89}.$

Объединение результатов рождает химеру. В Калуге и Рязани чирикс эффективнее плацебо, в целом — наоборот.

| <i>Калуга+Рязань</i> | <i>чирикс</i> | <i>плацебо</i> |
|-----------------------|---------------|----------------|
| <i>помогло</i> | 20 | 90 |
| <i>безрезультатно</i> | 80 | 10 |

, $\frac{20}{20+80} < \frac{90}{10+90}.$

Как говорится, приехали. Самое неприятное, что такого рода статистика — в облике экономических показателей и рейтингов, бывает, сваливается на нас со страниц вполне уважаемых газет.

16.9 Дисперсия и ковариация

Математическое ожидание квадрата разности $(X - m_x)^2$

$$D(X) = E(X - m_x)^2$$



называется *дисперсией* случайной величины X , а $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$ — *среднеквадратическим отклонением* X от среднего значения m_x .

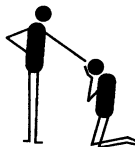
Для двух случайных величин X , Y рассматривают *смешанные моменты* $E(X^n Y^m)$. Важную роль во многих ситуациях играет *ковариация*:



$$\text{cov}(XY) = E[(X - m_x)(Y - m_y)]$$

и *коэффициент корреляции*:

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(XY)}{\sigma_x \sigma_y}.$$



Практическое вычисление корреляций часто приводило к обнаружению «неожиданных» связей мистического толка. При этом упускалось из вида, что *причинная связь* и *функциональная* — совсем разные вещи. Например процессы, подверженные влиянию солнечной активности, в результате могут коррелировать друг с другом, а их функциональная связь может быть использована для прогноза, но не для объяснения.

Некоторые учебники от термина «ковариация» вообще отказываются, заменяя его *корреляцией* или *корреляционным моментом* $R_{xy} = \text{cov}(XY)$, и называя коэффициентом корреляции ту же «нормированную» величину $r_{xy} = R_{xy}/\sigma_x \sigma_y$. Это имеет свои минусы, но разгружает терминологию, и выглядит приемлемо.

Обозначения

◀ и ▶ — начало и конец рассуждения, темы, доказательства

▷ — утверждение приводится без доказательства

◁ — утверждение легко может быть доказано

$(?)$ — предлагает проверить или доказать утверждение в качестве упражнения, либо довести рассуждение до «логической точки»

$(!)$ — предлагает обратить внимание

п. — пункт либо раздел

$A \Rightarrow B$, или $A \rightarrow B$ — из A следует B

$x \in X$ — x принадлежит X

$X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$ — объединение, пересечение и разность множеств

$X \subset Y$ — X подмножество Y , в том числе имеется в виду возможность $X \subseteq Y$, т. е. между $X \subset Y$ и $X \subseteq Y$ различия не делается

\sim — отношение эквивалентности, определяемое контекстом

\emptyset — пустое множество

\mathbb{N} — множество натуральных чисел $\{1, 2, \dots\}$

\mathbb{Q} — множество рациональных чисел (дробей)

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ — вещественная прямая

\mathbb{R}^2 — плоскость, \mathbb{R}^3 — трёхмерное пространство

\mathbb{C} — комплексная плоскость

(a, b) — интервал, множество точек $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$

$[a, b]$ — сегмент, или отрезок, множество точек $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$.

\exists — существует

\forall — для всех

i — мнимая единица, $i^2 = -1$

$z = x + iy$ — комплексное число (КЧ),

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ — тригонометрическая запись КЧ

$\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ — вектор, x_i — его координаты

Предметный указатель

Аксиоматика Пеано 48

алгоритм 46

алгоритм Евклида 44

аргумент 53

арифметическая прогрессия 109

Бином Ньютона 94

больше по вероятности 185

Вектор 57

вероятность 179

вещественная прямая 32

вещественное число 32

вогнутость 137

выпуклость 137

Геометрическая прогрессия 78,
83, 110

гипербола 105

граф 168

граф ориентированный 168

граф связный 168

графа вершина 168

графа ребро 168

график функции 54

Действительная часть 162

декартова система координат 59

дерево 168

десятичная запись 38

детерминант 64

дилемма заключенного 174

дискриминант 70, 72

дисперсия 187

додекаэдр 150

дроби 27

дробь несократимая 27

дробь периодическая 31

Задачи на составление
уравнений 142

задачи текстовые 142

замена переменных 123

знаменатель 27

знаменатель прогрессии 110

Игра «Ним» 39

игровая площадка 24

игрок 172

икосаэдр 150

интервал 37

инцидентность 168

иррациональные числа 28

Каноническое разложение 43

квадратный многочлен 71

ковариация 187

комплексная плоскость 161

комплексное число 162

континуум 154
контур 168
координаты полярные 59
корень функции 55
короткая арифметика
 Гильберта 43
коэффициент корреляции 187
кратность 45
критерий эффективности 172
критическая операция 171
критический путь 171

Лес 168
логарифм 85
логарифм десятичный 88
логарифм натуральный 88
локальный максимум 56
локальный минимум 56

Математическое ожидание 184
метод интервалов 135
метод математической
 индукции 140
метод неопределённых
 коэффициентов 118
мнимая единица 162
мнимая часть 162
множества эквивалентные 21
множество 21, 37
множество рациональных чисел
 28
множество целых чисел 24
моделирование 146
модуль числа 98
монотонность 56

Надграфик 139
наибольший общий делитель 44
наименьшее общее кратное 45
натуральное число 23
натуральный ряд 23
независимые события 184

неравенство Йенсена 139
НОД 44
НОК 45

Область значений функции 55
область определения функции
 55
объединение событий 181
октаэдр 150
операции с множествами 37
определитель 64
основным тождеством для
 логарифмов 86
основная теорема арифметики
 42
отображение 58
отрезок 37
отрицательное число 23

Парадокс Кардано 180
парадокс транзитивности 185
пересечение событий 181
перестановки 92
перестановки с повторениями
 93
показательная функция 80
поле рациональных чисел 28
полярные координаты 163
преобразование 58
проблема Гольдбаха 41
проблема чисел-близнецов 42
произведение событий 181
пространство элементарных
 событий 179
путь 168

Равновесие по Нэшу 174
размещения 92
разность прогрессии 109
рациональные числа 27
рекуррентное соотношение 84
рецепт РК 122

решение игры по Нэшу 174
 решение неравенств 134
 решето Эратосфена 41

Сегмент 37

сетевой график 169
 система координат 58
 система счисления двоичная 39
 случайная величина 184
 смешанная стратегия 177
 смежные вершины 168
 событие 179
 сопряжённое число 163
 сочетания 92
 спираль Эриксона 18
 среднее арифметическое 132, 140
 среднее геометрическое 132, 140
 среднее значение 184
 среднеквадратическое
 уклонение 187
 стратегия 173
 сумма событий 181
 счётность 154

Теорема Безу 76

теорема Евклида 40
 теорема Кронекера 158
 теорема Виета 68
 тождество 114

Условная вероятность 183

Формула Бинэ 71

формула Муавра 164
 формула Стирлинга 91
 формула Эйлера 165

формула перехода к другому
 основанию 88

функция 53

функция взаимно однозначная
 56

функция вогнутая 137

функция выигрыша 172

функция выпуклая 138

функция выпуклая вверх 137

функция линейная 60

функция логарифмическая 85

функция монотонно

возрастающая 56

функция непрерывная 55

функция нечётная 96

функция обратимая 56

функция чётная 96

функция-индикатор 184

Целевая функция 172

цепь 168

цикл 168

цикл гамильтонов 168

цикл элементарный 168

цикл простой 168

Числитель 27

число простое 40

число составное 40

Экспоненциальный рост 78

элемент системы 172

элементарное событие 179

\mathbb{R} 32

k -ичная система 39



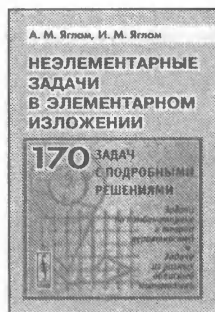
Пантаев М. Ю.

Математический гербарий абитуриента: АЛГЕБРА во всем ее блеске и многообразии

В жизни каждого молодого человека неизбежно наступает день, когда ему приходится сдавать экзамен по математике. Можно ли помочь отроку пережить этот день, и не просто пережить, а более-менее успешно перейти в следующий? То есть сдать экзамен. Существует ли рецепт успеха?

По авторитетному мнению, экзамен — не что иное, как кодовый замок, и чтобы его открыть, нужно знать шифр. Но особенность данного замка в том, что шифров — много: не единственная последовательность решенных задач ведет к цели, а многие и многие. Но... У всех таких последовательностей есть нечто общее.

В настоящей книге показана в действии одна из подобных «последовательностей», которая, по мнению автора, вполне достаточна для успешной подготовки по алгебре в любой вуз. Пособие представляет собой сборник задач с немедленными решениями, предназначенный для повторения той части школьного курса алгебры, которая востребована на выпускных и вступительных экзаменах. Эта книга — путеводитель по задачам разной степени трудности: тут есть и абсолютно стандартные задачи «базового» уровня, и более сложные «профильного» уровня, и задачи «с изюминкой», которые должен знать каждый абитуриент, не желающий относиться к тому, чем занимается, формально-прагматически. Книга обращена прежде всего к таким ученикам старших классов, которые честно изучали математику в школе, но кое-какие подробности за давностью лет подзабыли. Каждый, кто готовится к экзаменам, верит, что существуют могущественные приемы, ищет сильные методы и принимает за таковые все незнаемое прежде. Автор постарался не обмануть эти благородные ожидания, поделившись с читателями всеми тонкостями, которые узнал от своих учителей, коллег и учеников.



Яглом А. М., Яглом И. М.

Неэлементарные задачи в элементарном изложении: Задачи по комбинаторике и теории вероятностей, задачи из разных областей математики.

В настоящей книге, написанной известными отечественными математиками, большинство задач относится к математическим дисциплинам, изучаемым только в высшей школе, — к теории вероятностей, проективной геометрии, топологии, интегральному исчислению, теории чисел. В то же время ни одна из собранных здесь задач не требует для своего решения знаний, выходящих за пределы школьного курса математики (кроме кратких разъяснений, приведенных в отдельных местах книги перед условиями соответствующих задач), — и по формулировкам, и по методам решения все эти задачи вполне элементарны. Книга состоит из условий

задач, решений и ответов с указаниями. Главная цель книги — познакомить читателя с рядом математических фактов, идей и методов; форма задачника выбрана для того, чтобы стимулировать активную, творческую работу над всем этим материалом.



Буфеев С. В

Коллекция задач по арифметике целых чисел: Задания С6 ЕГЭ

В настоящем пособии представлены задачи по теории чисел, которые встречаются в вариантах Единого государственного экзамена и на олимпиадах по математике. Пособие появилось в результате подбора автором задач для проведения элективного курса по арифметике целых чисел в московском лицее № 1581 при МГТУ им. Н. Э. Баумана. В пособии собрано более 650 задач по указанной тематике. Ко всем задачам приведены ответы, к некоторым — указания, к наиболее трудным и типичным — решения.

Книга может использоваться для организации элективных курсов и факультативов; она рассчитана на учащихся профильных физико-математических классов, слушателей подготовительных курсов и абитуриентов вузов, преподавателей математики и репетиторов, а также всех, кто любит, умеет или желает научиться решать интересные, нестандартные и исследовательские математические задачи.



Гарднер М.

Загадки Сфинкса и другие математические головоломки

Перед читателем — впервые переведенная на русский язык работа выдающегося американского математика и популяризатора науки Мартина Гарднера. Автор как всегда остается верен своему уникальному стилю, который характеризуют яркость, доходчивость, тонкий юмор, блеск мысли, постоянное вовлечения читателя в самостоятельное творчество.

В книге представлены занимательные математические задачи и головоломки, публиковавшиеся автором в течение ряда лет на страницах «Журнала научной фантастики Айзека Азимова». Эти задачи, составленные самим М. Гарднером, увлеченными читателями его журнальной колонки, друзьями и коллегами автора, в равной мере относятся как к миру собственно математики, так и к миру логических парадоксов, многие из которых изложены в виде фантастических историй на загадочных далеких планетах.

Материал книги построен таким образом, что к каждой из головоломок дается ответ, который в большинстве случаев порождает новые вопросы, связанные с соответствующей темой. Решение этих новых вопросов приводится уже на следующем уровне ответов. Всего в книге четыре раздела с ответами и решениями, так что читатель может последовательно переходить с одного раздела на другой, постепенно углубляя свое понимание.

Книга не оставит равнодушными как профессиональных математиков, учителей и руководителей математических кружков, так и самый широкий круг любителей занимательных математических и логических задач и головоломок, ценителей научно-фантастического жанра.



Перельман Я. И.

Обманы зрения: Коллекция оптических иллюзий

Вниманию читателя предлагается книга, написанная выдающимся популяризатором науки Я. И. Перельманом и посвященная оптическим иллюзиям. В книге содержится подбор основных типов иллюзий, или, как их называет автор, зрительных обманов, которые могут быть наблюдаемы при условиях естественного зрения, без каких-либо приспособлений. Автор предпочел ограничиться только демонстрацией неоспоримого материала фактов, воздерживаясь от объяснения их причин, за исключением иллюзий, связанных с портретами, для которых в конце книги приводится объяснение.

Представляем Вам следующие книги:



URSS

- ✓ *Гашков С. Б.* Занимательная компьютерная арифметика:
Математика и искусство счета на компьютерах и без них.
- ✓ *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия.
- ✓ *Кривошапко С. Н., Иванов В. Н.* Энциклопедия аналитических поверхностей.
- ✓ *Эвнин А. Ю.* 150 КРАСИВЫХ задач для БУДУЩИХ МАТЕМАТИКОВ:
С подробными решениями.
- ✓ *Оре О.* Графы и их применение.
- ✓ *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии.
- ✓ *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа.
- ✓ *Пухначев Ю. В., Попов Ю. П.* Математика без формул. В 2 кн.
- ✓ *Пантаев М. Ю.* Математический гербарий абитуриента: АЛГЕБРА во всем ее блеске и многообразии.
- ✓ *Тьюринг А. М.* Может ли машина мыслить?
- ✓ *Дега Е. И.* Пишем выпускные квалификационные работы дискретной тематики:
176 тем и 26 конспектов бакалаврских работ и магистерских диссертаций.
- ✓ *Жуков А. В.* Прометеева искра: Античные истоки искусства математики.
- ✓ *Крэндалл Р., Померанс К.* Простые числа: Вычислительные и криптографические аспекты.
- ✓ *Милнор Дж.* Теория Морса.
- ✓ *Секованов В. С.* Что такое фрактальная геометрия?
- ✓ *Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я.* Элементарное введение в теорию вероятностей.
- ✓ *Перельман М. Е.* А почему это так? Физика в гостях у других наук.
- ✓ *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Математическая статистика.
- ✓ *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Чистяков А. В.* Математическая статистика
В ЗАДАЧАХ: Около 650 задач с подробными решениями.
- ✓ *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Введение в математическую статистику. Статистика знает все.
- ✓ *Чистяков В. П.* Курс теории вероятностей.
- ✓ *Емеличев В. А., Мельников О. И. и др.* Лекции по теории графов.
- ✓ *Босс В.* Лекции по математике: Нелинейные операторы и неподвижные точки.
- ✓ *Босс В.* Лекции по математике: Теория множеств: От Кантора до Коэна.

Наши книги можно приобрести в магазинах:

Тел./факс:
+7 (499) 724-25-45
(многоканальный)

E-mail:
URSS@URSS.ru
<http://URSS.ru>

«НАУКУ — ВСЕМ!» (м. Профсоюзная, Нахимовский пр-т, 56. Тел. (499) 724-2545)
 «Библио-Глобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, б. Тел. (495) 625-2457)
 «Московский дом книги» (м. Арбатская, ул. Новый Арбат, 8. Тел. (495) 203-8242)
 «Молодая гвардия» (м. Полянка, ул. Б. Полянка, 28. Тел. (495) 238-5001, (495) 780-3370)
 «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр-т, 40. Тел. (495) 137-6019)
 «Дом книги на Ладужской» (м. Бауманская, ул. Ладужская, 8, стр. 1. Тел. (495) 267-0302)
 «Санкт-Петербургский Дом книги» (Невский пр., 28. Тел. (812) 448-2355)
 «Книжный бум» (г. Киев, книжный рынок «Петровка», ряд 62, место 8 (павильон «АкадемКнига»). Тел. +38 (067) 273-5010)
 Сеть магазинов «Дом книги» (г. Екатеринбург, ул. Антона Валека, 12. Тел. (343) 253-5010)

Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Наше издательство специализируется на выпуске научной и учебной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений. Мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.



Среди вышедших и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:

- ✓ **Гарднер М.** Загадки Сфинкса и другие математические головоломки.
- ✓ **Секованов В. С. А. Н. Колмогоров:** Жизнь в науке и наука в жизни гения из Туношны.
- ✓ **Свердлик А. Г.** Как эмоции влияют на абстрактное мышление и почему математика невероятно точна: Как устроена кора головного мозга, почему её возможности ограничены и как эмоции, дополняя работу коры, позволяют человеку совершать научные открытия.
- ✓ **Мищенко А. С., Фоменко А. Т.** Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии.
- ✓ **Златопольский Д. М.** СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ: учебные и занимательные материалы: Более 100 содержательных задач. Фокусы, головоломки, исторические факты. Решение задач из ЕГЭ по информатике. Вопросы для конкурсов «Что? Где? Когда?» и «Брейн-ринг».
- ✓ **Пантаев М. Ю.** МАТАНАЛИЗ С ЧЕЛОВЕЧЕСКИМ ЛИЦОМ, или Как выжить после предельного перехода: Полный курс математического анализа. В 2-х томах.
- ✓ **Борисович Ю. Г., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко Т. Н.** Введение в топологию.
- ✓ **Перельман Я. И.** Обманы зрения: Коллекция оптических иллюзий.
- ✓ **Раков Д. Л., Печейкина Ю. А.** Парадоксальный мир невозможных фигур и оптических иллюзий.
- ✓ **Тактаров Н. Г.** Справочник по высшей математике для студентов вузов.
- ✓ **Федер Е.** ФРАКТАЛЫ.
- ✓ **Федин С. Н.** Математики тоже шутят.
- ✓ **Тарасов Л. В.** Азбука математического анализа: Беседы об основных понятиях.
- ✓ **Жуков А. В.** Вездесущее число «пи».
- ✓ **Овчинников А. В.** Алгебра и геометрия в вопросах и задачах: Основы алгебры и аналитической геометрии.
- ✓ **Мищенко А. С., Соловьев Ю. П., Фоменко А. Т.** Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии.
- ✓ **Челпанов Г. И.** Учебник логики.
- ✓ **Вигнер Э.** Инвариантность и законы сохранения. Этюды о симметрии.
- ✓ **Гашков С. Б.** Занимательная компьютерная арифметика: Быстрые алгоритмы операций с числами и многочленами.

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:
 тел. +7 (499) 724–25–45 (многоканальный)
 или электронной почтой URSS@URSS.ru
 Полный каталог изданий представлен
 в интернет-магазине: <http://URSS.ru>

**Научная и учебная
литература**

Издательская группа

URSS



представляет

М. Ю. Пантаев • Матанализ с человеческим лицом (в 2 книгах)

Кто сказал, что о математике нужно писать *скучно и нудно*?

В настоящей книге сделана попытка изложить курс математического анализа как составную часть общечеловеческой культуры. Автор пишет об интеграле и производной не сухо и сыро, но так, чтобы хоть немного приблизить математику к читателю, пусть и довольно далекому от нее. Читатель получит в свое распоряжение не только справочник, из которого можно «выдергивать» формулы для выполнения расчетных работ, но и книгу для чтения, способную помочь ему почувствовать, с какой поразительно красивой наукой он столкнулся.

М. Ю. Пантаев

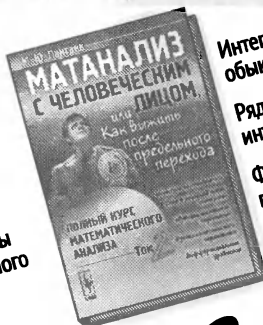
МАТАНАЛИЗ с человеческим лицом,

или Как
выжить
после
предельного
перехода



Том 1

Начало анализа
Язык анализа
Предел
последовательности
Предел функции
и непрерывность
Производная
Основные теоремы
дифференциального
исчисления
Применение
производной



Том 2

Интеграл
обыкновенный
Ряды и несобственные
интегралы
Функции нескольких
переменных
Функции
комплексного
переменного
Дифференциальные
уравнения

Полный курс математического анализа

Издательская группа

URSS



представляет

Зачем нужна теория сложных систем?

И как это автор осмелился
дать книге такое громкое название:
«Как работает природа»?

Ответ прост и лаконичен — в отличие от других теорий, описывающих те или иные отдельные сложные системы, **самоорганизованная критичность** — первая общая теория сложных систем, базирующаяся на прочном математическом фундаменте.



Модели самоорганизованной критичности в своем большинстве имеют дело с абстрактными сущностями, и их построение и исследование скорее может трактоваться как создание языка, нежели как описание реальных систем. Однако уже сейчас делаются попытки говорить на этом языке о **сейсмической активности**, о **солнечных вспышках**, строить математические модели, опирающиеся на геофизическую информацию...

Междисциплинарность обсуждаемой Пером Баком теории привела к тому, что ее весьма активно начали развивать и использовать в контексте **социэкономик**, чтобы выявить причины **биржевых крахов**, проследить механизмы их возникновения и выделить предвестники, предшествующие подобным событиям... Важный вопрос касается и **предсказуемости поведения** таких сложных систем, как **земная кора, фондовый рынок, биосфера** и другие подобные объекты. Еще 30 лет назад многие крупные ученые считали задачу **прогноза землетрясений** неразрешимой, а то и вовсе лежащей вне научного поля.

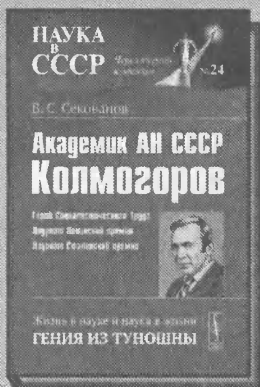
Издательская группа

URSS



представляет

В. С. Секованов • Академик АН СССР А. Н. Колмогоров: жизнь в науке и наука в жизни гения из Туношны



Андрей Николаевич Колмогоров

Академик АН СССР

Герой Социалистического Труда

Лауреат Ленинской премии

Лауреат Сталинской премии

Лауреат премии имени

П. Л. Чебышева АН СССР

Лауреат премии Бальцана
(первый лауреат по математике)

Лауреат премии
имени Н. И. Лобачевского

Лауреат премии Вольфа

Награжден
золотой медалью
имени Гельмгольца АН ГДР

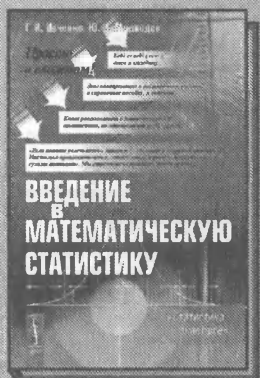
Награжден золотой
медалью Американского
метеорологического
общества

Кавалер ордена Знамени
Венгерской Народной
Республики

**Творческая биография
одного из самых
выдающихся
математиков XX века**

В 1994 году Российская академия наук установила премию имени А. Н. Колмогорова, вручаемую за выдающиеся результаты в области математики.

Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев • Введение в математическую статистику



Просто о сложном!

Это одновременно и расширенный учебник, и справочное пособие, и задачник.

Книга рассказывает о математической статистике, но одновременно и обучает ей.

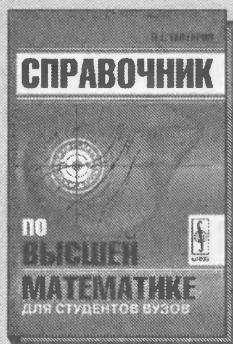
«Если хотите увлечь вашим знанием — сделайте его привлекательным. Настолько привлекательным, чтобы книги вчерашнего дня показались сухими листьями».

Мы стремились следовать этому правилу.

*Статистика
знает всё!*



Н. Г. Тактаров • Справочник по высшей математике для студентов вузов



Настоящий справочник содержит

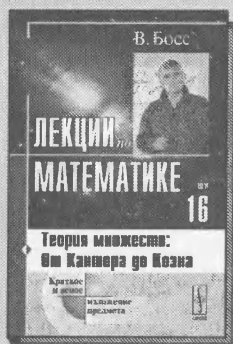
все главные разделы высшей математики

— от математического анализа алгебры до математической логики и дифференциальной геометрии, включая аналитическую геометрию, теорию функций комплексной переменной, теорию дифференциальных уравнений, вариационное исчисление, векторный и тензорный анализ, теорию вероятностей, математическую статистику, теорию множеств и численные методы.

Наряду с теоретическим материалом в справочник включено

более 500 примеров с подробными решениями. Способ изложения материала в сочетании с объемом содержащейся информации дает отличную возможность применять справочник в современных учебных программах и в то же время ставит данную книгу **в один ряд с лучшими классическими справочниками** по высшей математике. Доступное изложение материала позволяет использовать справочник и для самостоятельного изучения математики.

«Лекции по математике» В. Босса



В условиях информационного наводнения инструменты вчерашнего дня перестают работать. Поэтому учить надо как-то иначе. «Лекции» дают пример. Плохой ли, хороший — покажет время. Но в любом случае это продукт нового поколения. Те же «колеса», тот же «пруль», та же математическая суть — но по-другому.

В. Босс

В «Лекциях по математике» В. Босса вышли тома:

1. Анализ. 2. Дифференциальные уравнения. 3. Линейная алгебра. 4. Вероятность, информация, статистика. 5. Функциональный анализ. 6. Алгоритмы, логика, вычислимость. От Диофанта до Тьюринга и Гёделя. 7. Оптимизация. 8. Теория групп. 9. ТФКП. 10. Перебор и эффективные алгоритмы. 11. Уравнения математической физики. 12. Контрпримеры и парадоксы. 13. Топология. 14. Теория чисел. 15. Нелинейные операторы и неподвижные точки. 16. Теория множеств: От Кантора до Козы.

Из отзывов читателей:

Чтобы усвоить предмет, надо схватывать его от деталей, обходить центральные конструкции. Это тяжелая работа, которая в «Лекциях» проработана автором.

Дается то, чего недостает. Общая картина, мотивация, взаимосвязи. И самое главное — легкость вхождения в любую тему.

Содержание продумано и хорошо увязано. Громоздкие доказательства ужалены до нескольких строчек. Виртуозное владение языком.

Валерий Иванович Опойцев —

доктор физико-математических наук, профессор.

Выделяется умением сложное объяснять просто.

Широко известны его «Лекции по математике» (под псевдонимом В. Босс). Читайте также идущую нарасхват популярную книгу В. Босс. «Интуиция и математика».

Отзывы читателей:

» Чтобы усвоить предмет, надо освободить его от деталей, обнажить центральные конструкции. Эту тяжелую работу автор берет на себя.

» Содержание продумано и хорошо увязано. Доказательства ужаты до нескольких строчек. Виртуозное владение языком.

» Дается то, чего недостает. Общая картина, мотивация, взаимосвязи. И самое главное — легкость вхождения в любую тему.



Все книги проекта
ШКОЛА ОПОЙЦЕВА
сопровождаются
видеолекциями
на **oschool.ru**
и на **youtube.com**

20159 ID 216780



9 785971 035596

Издательская группа

URSS

Каталог изданий
в Интернете:
<http://URSS.ru>

E-mail: URSS@URSS.ru

117335, Москва, Телефон / факс
Нахимовский (многоканальный)
проспект, 56 +7 (499) 724 25 45

Отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные опечатки присылайте по адресу URSS@URSS.ru. Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги на сайте <http://URSS.ru>